Ecole d'ingénieurs Sup Galilée
Energétique - Informatique - Instrumentation
Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique
Télécommunications et Réseaux

Ingénieurs MACS 2 - TP F.E.M. (S8)

Eléments finis $\mathbb{P}_1$-Lagrange en dimension $\geqslant 1$: épisode 6

B.V.P. : formulation variationnelle discrète

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications
Institut Galilée
Université Paris XIII.

2024/03/23

Prérequis

- Cours de Mr Vauchelet,
- Les épisodes précédents.

Objectif :

- Espaces fonctionnels discrets
- Passage de la formulation variationnelle à la formulation variationnelle discrète
- Passage de la formulation variationnelle discrète à la représentation matricielle

Bibliographie

[Coh] A. Cohen.
Approximations variationnelles des EDP. Notes du Cours de M2.
Polycopié (https://www.ljll.math.upmc.fr/~cohen/CohenM2.pdf).

[QV08] Alfio M. Quarteroni and Alberto Valli.
Numerical Approximation of Partial Differential Equations.
Springer Publishing Company, Incorporated, 1st ed. 1994. 2nd printing edition, 2008.

$$(1)\begin{cases} \eta u - \Delta u = f, & \text{dans } \Omega \quad (1a)\\ u = g_D, & \text{sur } \Gamma^D \quad (1b)\\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g_R, & \text{sur } \Gamma^R \quad (1c)\end{cases}$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné, connexe de frontière, $\partial\Omega$, $\mathcal{C}^1$ par morceaux. $\partial\Omega = \Gamma^D \cup \Gamma^R$, avec $\mathring{\Gamma}^D \cap \mathring{\Gamma}^R = \emptyset$.

Résumé épisode 5: Soient $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, $g_R \in \mathrm{L}^2(\Gamma^R)$, $g_D \in \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma^D)$, $\eta \geqslant 0$ et $\alpha \geqslant 0$.

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in \mathrm{H}^1_{g_D,\Gamma^D}(\Omega) \text{ tel que} \\ \mathcal{A}(u,v) = \mathcal{L}(v), \ \forall v \in \mathrm{H}^1_{0,\Gamma^D}(\Omega) \end{cases} \qquad \text{(F.V.)}$$

avec

$$\mathcal{A}(u,v) \stackrel{\text{def}}{=} \eta \int_\Omega u.v d\mathrm{q} + \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle d\mathrm{q} + \alpha \int_{\Gamma^R} uv d\sigma$$
$$\mathcal{L}(v) \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega f.v d\mathrm{q} + \int_{\Gamma^R} g_R v d\sigma$$

- **Théorème de Lax-Milgram** + relèvement $\Rightarrow$ (F.V.) admet une unique solution
- Si u solution de (F.V.) appartient à $\mathrm{H}^1_{g_D,\Gamma^D}(\Omega) \cap \mathrm{H}^2(\Omega)$ alors u est solution de (1).

Plan

épisode 1: rappels

Soit Ω_h un maillage de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. on note $n_{\mathrm{q}} = \Omega_h.n_{\mathrm{q}}$, $\mathrm{q} = \Omega_h.\mathrm{q}$, $\mathrm{me} = \Omega_h.\mathrm{me}$, ...

$$\Omega_h = \bigcup_{k=1}^{n_{\mathrm{me}}} K_k, \quad K_k \ n\text{-simplexe}$$

- $V(\Omega_h)$, espace des éléments finis $\mathbb{P}_1$-Lagrange sur Ω_h :

$$\begin{aligned} V(\Omega_h) &\stackrel{\text{def}}{=} \{v \in \mathcal{C}^0(\Omega_h;\mathbb{R}) \text{ tq } \forall k \in [\![1, n_{\mathrm{me}}]\!],\ v_{|K_k} \in \mathbb{R}_1[X_1,\dots,X_n]\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\varphi_1,\dots,\varphi_{n_{\mathrm{q}}}\right) \end{aligned}$$

Les $\varphi_i \in V(\Omega_h)$ vérifient $\varphi_i(\mathrm{q}^j) = \delta_{i,j}, \quad \forall (i,j) \in [\![1, n_{\mathrm{q}}]\!]^2$

- Opérateur d'interpolation: $V(\Omega) = \mathrm{H}^1(\Omega)$

$$\left\{ \begin{array}{lccl} \pi_h & : \mathrm{H}^1(\Omega) & \longrightarrow & V(\Omega_h) \\ & w & \longmapsto & \pi_h(w) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n_{\mathrm{q}}} w(q^i)\varphi_i \end{array} \right.$$

- Discrétisation de $\mathrm{H}^1(\Omega)$ par $V(\Omega_h) = \mathrm{Vect}\left(\{\varphi_i\}_{i=1}^{n_{\mathrm{q}}}\right)$

Soit $v \in \mathrm{H}^1(\Omega)$, $\pi_h(v) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n_{\mathrm{q}}} v(q_i)\varphi_i \in V(\Omega_h)$

- Discrétisation de $\mathrm{H}^1_{0,\Gamma^D}(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in \mathrm{H}^1(\Omega) \text{ t.q. } \gamma_{\Gamma^D}(v) = 0\}$

On note $\mathcal{I}_D \subset [\![1, n_{\mathrm{q}}]\!]$ l'ensemble des indices des points de $\overline{\Gamma^D_h}$ et $\mathcal{I}_D^c = [\![1, n_{\mathrm{q}}]\!] \backslash \mathcal{I}_D$

$$\forall i \in \mathcal{I}_D,\ \mathrm{q}^i \in \overline{\Gamma^D_h} \quad \text{et} \quad \forall i \in \mathcal{I}_D^c,\ \mathrm{q}^i \notin \overline{\Gamma^D_h}.$$

Soit $v \in \mathrm{H}^1_{0,\Gamma^D}(\Omega)$,

$$\pi_h(v) = \sum_{i=1}^{n_{\mathrm{q}}} v(q_i)\varphi_i = \sum_{i\in\mathcal{I}_D} \underbrace{v(q_i)}_{=0}\varphi_i + \sum_{i\in\mathcal{I}_D^c} v(q_i)\varphi_i = \sum_{i\in\mathcal{I}_D^c} v(q_i)\varphi_i$$

$$\mathrm{H}^1_{0,\Gamma^D}(\Omega) \approx V_{0,\Gamma^D_h}(\Omega_h) = \mathrm{Vect}\left(\{\varphi_i\}_{i\in\mathcal{I}_D^c}\right)$$

- Discrétisation de $\mathrm{H}^1(\Omega)$ par $V(\Omega_h) = \mathrm{Vect}\left(\{\varphi_i\}_{i=1}^{n_{\mathrm{q}}}\right)$

Soit $v \in \mathrm{H}^1(\Omega)$, $\pi_h(v) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n_{\mathrm{q}}} v(q_i)\varphi_i \in V(\Omega_h)$

- Discrétisation de $\mathrm{H}^1_{g_D,\Gamma^D}(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in \mathrm{H}^1(\Omega) \text{ t.q. } \gamma_{\Gamma^D}(v) = g_D\}$

On note $\mathcal{I}_D \subset [\![1, n_{\mathrm{q}}]\!]$ l'ensemble des indices des points de $\overline{\Gamma^D_h}$ et $\mathcal{I}_D^c = [\![1, n_{\mathrm{q}}]\!] \backslash \mathcal{I}_D$

$$\forall i \in \mathcal{I}_D,\ \mathrm{q}^i \in \overline{\Gamma^D_h} \quad \text{et} \quad \forall i \in \mathcal{I}_D^c,\ \mathrm{q}^i \notin \overline{\Gamma^D_h}.$$

Soit $v \in \mathrm{H}^1_{g_D,\Gamma^D}(\Omega)$,

$$\pi_h(v) = \sum_{i=1}^{n_{\mathrm{q}}} v(q_i)\varphi_i = \sum_{i\in\mathcal{I}_D} v(q_i)\varphi_i + \sum_{i\in\mathcal{I}_D^c} v(q_i)\varphi_i = \sum_{i\in\mathcal{I}_D} g_D(q_i)\varphi_i + \sum_{i\in\mathcal{I}_D^c} v(q_i)\varphi_i$$

$$V_{g_D,\Gamma^D_h}(\Omega_h) \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V(\Omega_h) \text{ t.q. } v = \sum_{i\in\mathcal{I}_D} g_D(q_i)\varphi_i + \sum_{i\in\mathcal{I}_D^c} \mu_i\varphi_i,\ \forall \mu_i \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathrm{H}^1_{g_D,\Gamma^D}(\Omega) \approx V_{g_D,\Gamma^D_h}(\Omega_h) \quad \text{pas un espace vectoriel!}$$

Plan

Définition: [QV08], p.90

Une famille de triangulations (maillages) $\{\tau_h\}_{h>0}$, de Ω, est dites **régulière** si

$$\exists \sigma \geqslant 1 \text{ t.q. } \max_{K\in\tau_h} \frac{h_K}{\rho_K} \leqslant \sigma, \ \forall h>0. \tag{2}$$

où $h_K = \sup\{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|\,;\ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in K^2\}$ et $\rho_K = \sup\{\mathrm{diam}(B);\ B \text{ boule incluse dans } K\}$. On note $h \stackrel{\text{def}}{=} \max_{K\in\tau_h} h_K$.

On note $|.|_{m,\Omega}$ la semi-norme sur $\mathrm{H}^m(\Omega)$:

$$|u|_{m,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega |D^\alpha u(\mathrm{q})|^2 d\mathrm{q}\right)^{1/2} \tag{3}$$

Si Ω est un domaine polygonal alors $V(\Omega_h) \subset \mathrm{H}^1(\Omega)$.

Theorem: [QV08], p.90

Soient $\{\tau_h\}_{h>0}$, une famille de triangulations régulières de Ω, un domaine polygonal, et $u \in \mathrm{H}^2(\Omega)$. Il existe $C_0>0$ et $C_1>0$, indépendants de $h \stackrel{\text{def}}{=} \max_{K\in\tau_h} h_K$, tels que

$$|u-\pi_h(u)|_{0,\Omega} \leqslant C_0 h^2 \,|u|_{2,\Omega}$$
$$|u-\pi_h(u)|_{1,\Omega} \leqslant C_1 h \,|u|_{2,\Omega}$$

avec $\pi_h(u) = \sum_{i=1}^{n_{\mathrm{q}}} u(q^i)\varphi_i \in V(\Omega_h)$

Soit E_h un maillage élémentaire de type d-simplexes de $E\subset\mathbb{R}^n$ (objet siMeshElt). On note

$$\|u_h\|_{0,E_h} = \left(\int_{E_h} |u_h(\mathrm{q})|^2 d\mathrm{q}\right)^{1/2} = \|u_h\|_{0,E} \text{ si } E_h = E \text{ polygonal}$$

et si $\mathrm{d} = n$

$$\|u_h\|_{1,E_h} = \left(\sum_{|\alpha|\leqslant 1} \int_{E_h} |D^\alpha u_h(\mathrm{q})|^2 d\mathrm{q}\right)^{1/2} = \|u_h\|_{1,E} \text{ si } E_h = E \text{ polygonal}$$

$$|u_h|_{1,E_h} = \left(\sum_{|\alpha|=1} \int_{E_h} |D^\alpha u_h(\mathrm{q})|^2 d\mathrm{q}\right)^{1/2} = |u_h|_{0,E} \text{ si } E_h = E \text{ polygonal}$$

Exo:

1. Ecrire la fonction Matlab/Octave, normH0, permettant de calculer $\|u_h\|_{0,E_h}$
2. Ecrire la fonction Matlab/Octave, seminormH1, permettant de calculer $|u_h|_{1,E_h}$.
3. Ecrire la fonction Matlab/Octave, normH1, permettant de calculer $\|u_h\|_{1,E_h}$.

Ces fonctions seront écrites dans le répertoire `+siMeshElt`

Plan

$$\begin{cases} \text{Trouver } \; u \in \mathrm{H}^1_{g_D,\Gamma^D}(\Omega) \; \text{ tel que} \\ \mathcal{A}(u,v) = \mathcal{L}(v), \; \forall v \in \mathrm{H}^1_{0,\Gamma^D}(\Omega) \end{cases} \qquad \text{(F.V.)}$$

avec

$$\mathcal{A}(u,v) \stackrel{\text{def}}{=} \eta \int_\Omega u.v d\mathrm{q} + \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle d\mathrm{q} + \alpha \int_{\Gamma^R} uv d\sigma$$

$$\mathcal{L}(v) \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega f.v d\mathrm{q} + \int_{\Gamma^R} g_R v d\sigma$$

On a alors la formulation variationnelle discrète appelée aussi **méthode de Galerkin**:

$$\begin{cases} \text{Trouver } \; u_h \in V_{g_D,\Gamma_h^D}(\Omega_h) \; \text{ tel que} \\ \mathcal{A}_h(u_h,v_h) = \mathcal{L}_h(v_h), \; \forall v_h \in V_{0,\Gamma_h^D}(\Omega_h) \end{cases} \qquad \text{(F.V.H)}$$

avec

$$\mathcal{A}_h(u_h,v_h) \stackrel{\text{def}}{=} \eta \int_{\Omega_h} u_h.v_h d\mathrm{q} + \int_{\Omega_h} \langle \nabla u_h, \nabla v_h \rangle d\mathrm{q} + \alpha \int_{\Gamma_h^R} u_h v_h d\sigma$$

$$\mathcal{L}_h(v_h) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_h} f.v_h d\mathrm{q} + \int_{\Gamma_h^R} g_R v_h d\sigma$$

On a

$$\mathcal{A}_h(u_h,v_h) \stackrel{\text{def}}{=} \eta \int_{\Omega_h} u_h.v_h d\mathrm{q} + \int_{\Omega_h} \langle \nabla u_h, \nabla v_h \rangle d\mathrm{q} + \alpha \int_{\Gamma_h^R} u_h v_h d\sigma$$

$$\mathcal{L}_h(v_h) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega_h} f.v_h d\mathrm{q} + \int_{\Gamma_h^R} g_R v_h d\sigma$$

Exo:

1. Montrer que $\mathcal{A}_h : V(\Omega_h) \times V(\Omega_h) \longrightarrow \mathbb{R}$ est bilinéaire et que $\mathcal{L}_h : V(\Omega_h) \longrightarrow \mathbb{R}$ est linéaire.
2. Que peut-on dire si Ω est polygonal?

Si Ω polygonal, $\Omega_h = \Omega$.

Lemme: Lemme de Céa, (voir [QV08] p.174, [Coh] p.11)

Les hypothèses du théorème de Lax-Milgram étant vérifiées, la solution w de $(F.V.R)$ et la solution w_h de $(F.V.R.)_h$ vérifient

$$\|w - w_h\|_{1,\Omega} \leqslant \frac{M}{\nu} \inf_{v_h \in V_{0,\Gamma^D}(\Omega)} \|w - v_h\|_{1,\Omega}.$$

les constantes $M > 0$ et $\nu > 0$ étant respectivement celles de continuité et coercivité de $\mathcal{A}$.

Theorem: [QV08], p.90

Soient $\{\tau_h\}_{h>0}$, une famille de triangulations régulières de Ω, un domaine polygonal, et $u \in \mathrm{H}^2(\Omega)$. Il existe $C_0 > 0$ et $C_1 > 0$, indépendants de $h \stackrel{\text{def}}{=} \max_{K\in\tau_h} h_K$, tels que

$$|u - \pi_h(u)|_{0,\Omega} \leqslant C_0 h^2 |u|_{2,\Omega}$$
$$|u - \pi_h(u)|_{1,\Omega} \leqslant C_1 h |u|_{2,\Omega}$$

$u \in \mathrm{H}^2(\Omega)$ solution de (F.V.) et u_h solution de (F.V.H):

☞ $\|u - u_h\|_{1,\Omega} = \mathcal{O}(h)$ et $\|u - u_h\|_{0,\Omega} = \mathcal{O}(h^2)$ (admis)

Plan

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Trouver } u_h \in V_{g_D,\Gamma_h^D}(\Omega_h) \text{ tel que}\\ \quad \mathcal{A}_h(u_h,v_h) = \mathcal{L}_h(v_h),\ \forall v_h \in V_{0,\Gamma_h^D}(\Omega_h)\end{array}\right. \quad \text{(F.V.H)}$$

- **Etape** 1: Montrons que

$$\mathcal{A}_h(u_h,v_h) = \mathcal{L}_h(v_h),\ \forall v_h \in V_{0,\Gamma_h^D}(\Omega_h) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A}_h(u_h,\varphi_i) = \mathcal{L}_h(\varphi_i),\ \forall i \in \mathcal{I}_D^c$$

$\boxed{\Rightarrow}$ trivial car $\varphi_i \in V_{0,\Gamma_h^D}(\Omega_h)$,

$\boxed{\Leftarrow}$

$$\text{(F.V.H)} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Trouver } u_h \in V_{g_D,\Gamma_h^D}(\Omega_h) \text{ tel que}\\ \quad \mathcal{A}_h(u_h,\varphi_i) = \mathcal{L}_h(\varphi_i),\ \forall i \in \mathcal{I}_D^c\end{array}\right.$$

- **Etape** 2: De manière générale (sans prise en compte de la condition de Dirichlet)

$$u_h \in V(\Omega_h) \Leftrightarrow u_h = \sum_{j=1}^{n} u_j\varphi_j$$

et, par bilinéarité de $\mathcal{A}_h$, on a

$$\mathcal{A}_h(u_h,\varphi_i) = \mathcal{A}_h\Big(\sum_{j=1}^{n} u_j\varphi_j,\varphi_i\Big) = \sum_{j=1}^{n} \mathcal{A}_h(\varphi_j,\varphi_i)u_j$$

On note $\mathbb{A}^h \in \mathcal{M}_{n_q}(\mathbb{R})$, definie par $\mathbb{A}^h_{i,j} = \mathcal{A}_h(\varphi_j,\varphi_i)$ et $\boldsymbol{U} = (u_i)_{i=1}^{n_q} \in \mathbb{R}^{n_q}$.

$$\mathcal{A}_h(u_h,\varphi_i) = \mathbb{A}^h_{i,:} * \boldsymbol{U} \quad \text{où } \mathbb{A}^h_{i,:} \ i\text{-ème ligne de } \mathbb{A}^h \text{ et } * \text{ produit matriciel}$$

$$\text{(F.V.H)} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Trouver } u_h \in V_{g_D,\Gamma_h^D}(\Omega_h) \text{ tel que}\\ \quad \mathcal{A}_h(u_h,\varphi_i) = \mathcal{L}_h(\varphi_i),\ \forall i \in \mathcal{I}_D^c\end{array}\right.$$

$$u_h \in V_{g_D,\Gamma_h^D}(\Omega_h) \Leftrightarrow u_h = \sum_{j\in\mathcal{I}_D} g_D(q_j)\varphi_j + \sum_{j\in\mathcal{I}_D^c} u_j\varphi_j$$

Chercher u_h revient donc à déterminer les $(u_j)_{j\in\mathcal{I}_D^c}$.

$$\mathcal{A}_h(u_h,\varphi_i) = \sum_{j\in\mathcal{I}_D} \mathcal{A}_h(\varphi_j,\varphi_i)g_D(q_j) + \sum_{j\in\mathcal{I}_D^c} \mathcal{A}_h(\varphi_j,\varphi_i)u_j$$

- **Méthode 1:** inconnues en Dirichlet

$$\text{(F.V.H)} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lll}\text{Trouver } (u_i)_{i=1}^{n_q} \text{ tel que} & & \\ \quad \sum_{j=1}^{n_q} \mathcal{A}_h(\varphi_j,\varphi_i)u_j & = \mathcal{L}_h(\varphi_i), & \forall i \in \mathcal{I}_D^c\\ \quad u_i & = g_D(q^i), & \forall i \in \mathcal{I}_D\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow (S_D) \left\{\begin{array}{lll}\text{Trouver } \boldsymbol{U} \in \mathbb{R}^{n_q} \text{ tel que} & & \\ \quad \mathbb{A}^h_{i,:} * \boldsymbol{U} & = \mathcal{L}_h(\varphi_i), & \forall i \in \mathcal{I}_D^c\\ \quad \boldsymbol{U}_i & = g_D(q^i), & \forall i \in \mathcal{I}_D\end{array}\right.$$

(S_D) système linéaire de n_q équations à n_q inconnues. ☞ On perd la symétrie si $\mathbb{A}^h$ est symétrique!

$$(\text{F.V.H}) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver} \quad u_h \in V_{g_D,\Gamma_h^D}(\Omega_h) \quad \text{tel que} \\ \qquad \mathcal{A}_h(u_h,\varphi_i) = \mathcal{L}_h(\varphi_i), \ \forall i \in \mathcal{I}_D^c \end{array} \right.$$

$$u_h \in V_{g_D,\Gamma_h^D}(\Omega_h) \Leftrightarrow u_h = \sum_{j\in\mathcal{I}_D} g_D(\mathrm{q}^j)\varphi_j + \sum_{j\in\mathcal{I}_D^c} u_j\varphi_j = R_h + w_h$$

- **Méthode 2:** relèvement
  $R_h = \sum_{j\in\mathcal{I}_D} g_D(\mathrm{q}^j)\varphi_j$, relèvement/prolongement par 0 de g_D dans $V(\Omega_h)$

$$\boldsymbol{R} \in \mathbb{R}^{n_\mathrm{q}} \text{ t.q. } \boldsymbol{R}_i = g_D(\mathrm{q}^i), \ \forall i \in \mathcal{I}_D \text{ et } \boldsymbol{R}_i = 0, \ \forall i \in \mathcal{I}_D^c$$

  On note $\boldsymbol{U} = (u_j)_{j=1}^{n_\mathrm{q}} \in \mathbb{R}^{n_\mathrm{q}}$; $\boldsymbol{U}_{\mathcal{I}_D} = \boldsymbol{R}_{\mathcal{I}_D}$.
  Chercher u_h : déterminer les $N \stackrel{\text{def}}{=} n_\mathrm{q} - \operatorname{card}\mathcal{I}_D$ inconnues, $(u_j)_{j\in\mathcal{I}_D^c} = \boldsymbol{U}_{\mathcal{I}_D^c}$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_h(u_h,\varphi_i) = \mathcal{A}_h(R_h + w_h,\varphi_i) &= \sum_{j\in\mathcal{I}_D} \mathcal{A}_h(\varphi_j,\varphi_i) g_D(\mathrm{q}^j) + \sum_{j\in\mathcal{I}_D^c} \mathcal{A}_h(\varphi_j,\varphi_i) u_j \\ &= \mathbb{A}^h_{i,\mathcal{I}_D} * \boldsymbol{R}_{\mathcal{I}_D} + \mathbb{A}^h_{i,\mathcal{I}_D^c} * \boldsymbol{U}_{\mathcal{I}_D^c} \end{aligned}$$

$$(\text{F.V.H}) \Leftrightarrow (S_R) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver} \quad \boldsymbol{U}_{\mathcal{I}_D^c}, \quad \text{tel que} \\ \qquad \mathbb{A}^h_{i,\mathcal{I}_D^c} * \boldsymbol{U}_{\mathcal{I}_D^c} \quad = \mathcal{L}_h(\varphi_i) - \mathbb{A}^h_{i,\mathcal{I}_D} * \boldsymbol{R}_{\mathcal{I}_D}, \quad \forall i \in \mathcal{I}_D^c \end{array} \right.$$

(S_R) système linéaire de N équations à N inconnues. ☞ On conserve la symétrie si $\mathbb{A}^h$ est symétrique!