Projet S8: Valeurs propres et vecteurs propres pour le problème de Poisson

François Cuvelier

2020/02/26

Problème de Poisson

Trouver $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ tel que

$$-\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{dim}}, \tag{1}$$

$$u = g_D \quad \text{sur } \Gamma_D, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + a_R \, u = g_R \quad \text{sur } \Gamma_R, \tag{3}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{dim}}$ avec $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_R$ et $\Gamma_D \cap \Gamma_R = \emptyset$.

Problème aux valeurs propres

Trouver $(\lambda, u) \in \mathbb{C} \times \mathrm{H}^1(\Omega)$ tel que

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{dim}}, \tag{4}$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_D, \tag{5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + a_R \, u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_R, \tag{6}$$

L'objectif de ce projet est de déterminer numériquement des valeurs propres et vecteurs propres de différents problèmes aux limites en dimension $dim = 1, 2, \ldots$ pour différentes types de conditions aux limites. Des exemples avec solutions analytiques seront proposés et permettront la validation des différents codes écrits.Une **méthode aux différences finies**, pour les problèmes 1D et 2D sur rectangle, sera implémentée. Pour des problèmes plus complexes, la **méthode des éléments finis** sera utilisée via des logiciels/outils fournis.

Les logiciels utilisés seront:

- Matlab et GNU Octave pour la partie *différences finies* et les représentations graphiques,
- GMSH pour la génération de maillages 2d (voir 3d),
- La toolbox Matlab/Octave fc-vfem$\mathbb{P}_1$ pour la partie *éléments finis*,

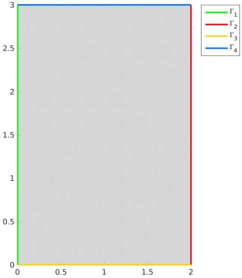
Exemple 1

Problème aux valeurs propres

Trouver $(\lambda, u) \in \mathbb{C} \times \mathrm{H}^1(\Omega)$ tel que

$$-\Delta u = \lambda u \qquad \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \tag{7}$$

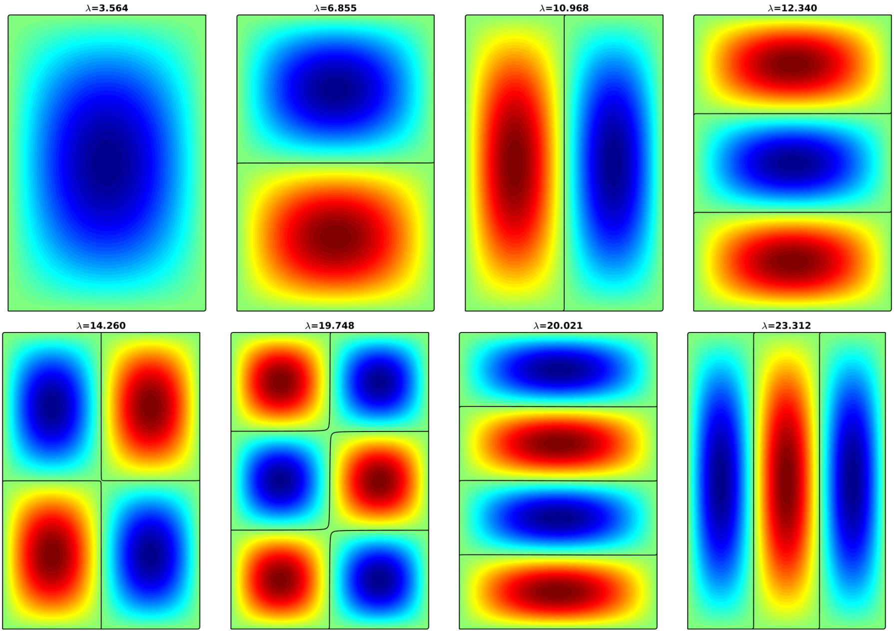
$$u = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \tag{8}$$

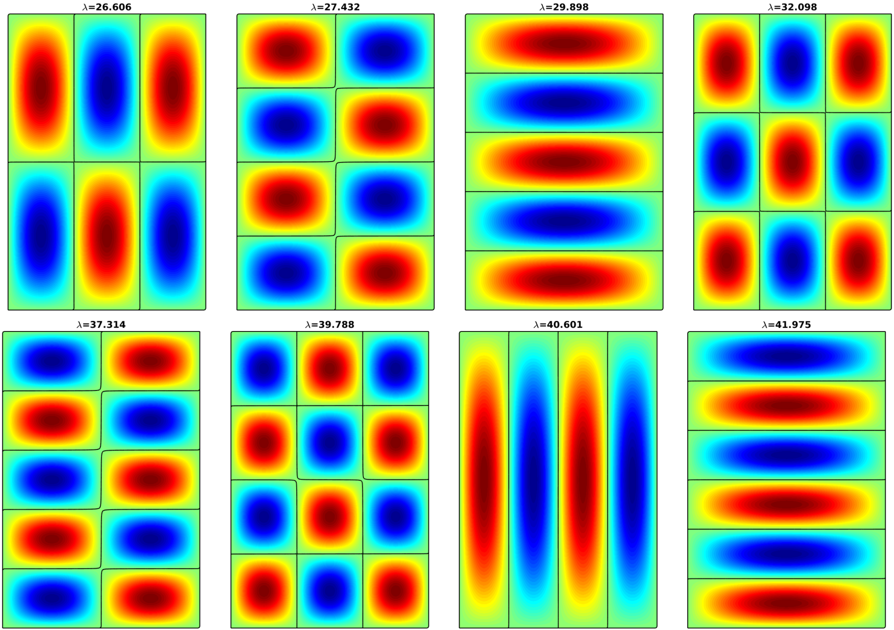


- Ω : rectangle $[0,2] \times [0,3]$
- $L = 2,\ H = 3,$
  $\forall (k,l) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*.$

$$\lambda_{k,l} = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{H}\right)^2$$

$$u_{k,l}(x,y) = \sin(\frac{k\pi}{L}x)\sin(\frac{l\pi}{H}y).$$


λ=3.564
λ=6.855
λ=10.968
λ=12.340
λ=14.260
λ=19.748
λ=20.021
λ=23.312


λ=26.606
λ=27.432
λ=29.898
λ=32.098
λ=37.314
λ=39.788
λ=40.601
λ=41.975

Exemple 2, conditions mixtes

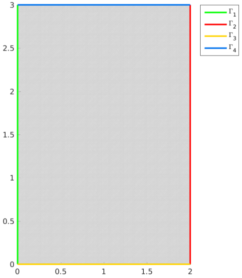
Problème aux valeurs propres

Trouver $(\lambda, u) \in \mathbb{C} \times \mathrm{H}^1(\Omega)$ tel que

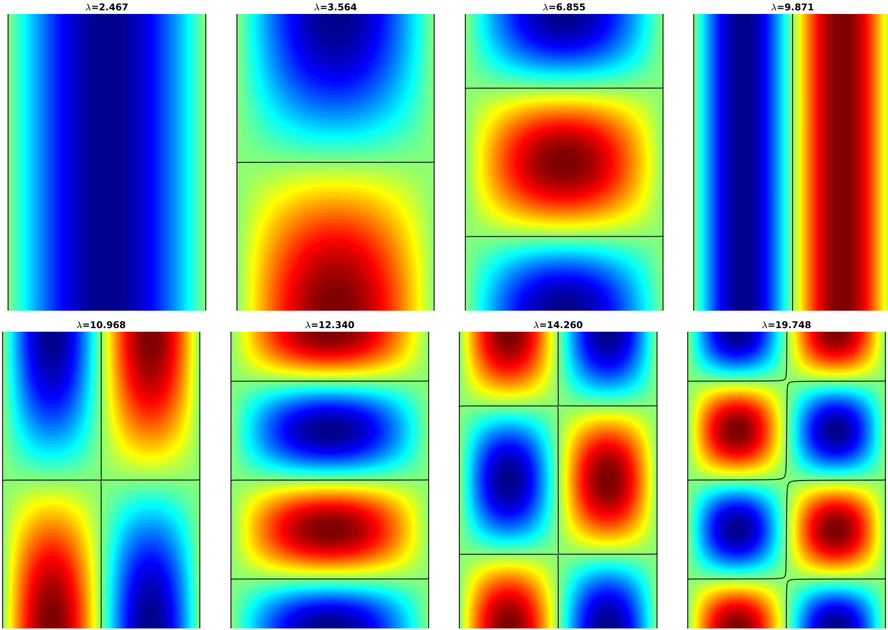
$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \tag{9}$$

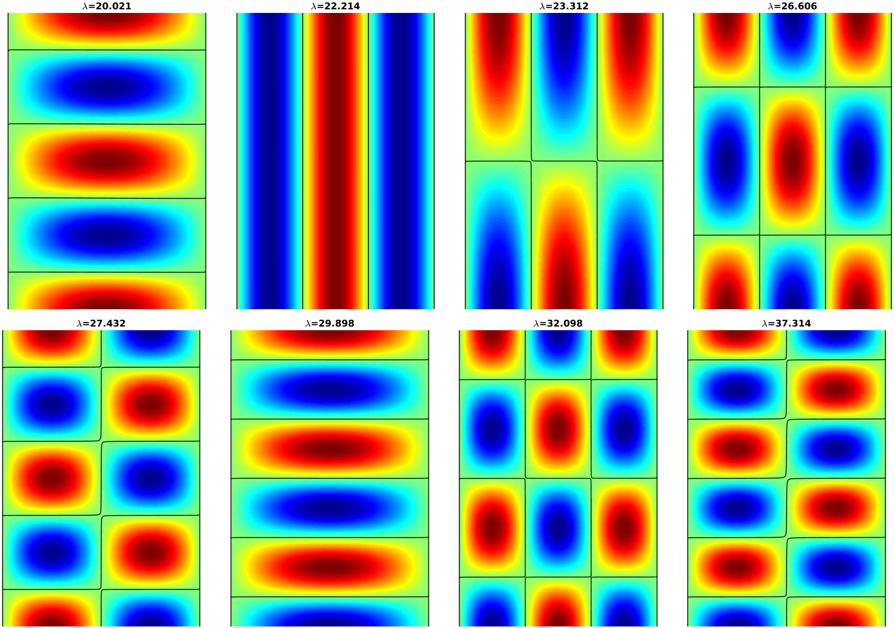
$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \tag{10}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \tag{11}$$



- Ω : rectangle $[0, 2] \times [0, 3]$


λ=2.467
λ=3.564
λ=6.855
λ=9.871
λ=10.968
λ=12.340
λ=14.260
λ=19.748


λ=20.021
λ=22.214
λ=23.312
λ=26.606
λ=27.432
λ=29.898
λ=32.098
λ=37.314

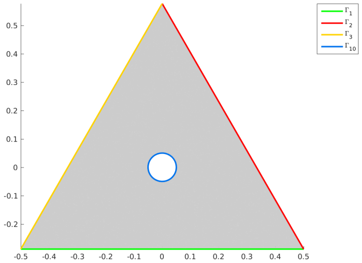
Problème aux valeurs propres

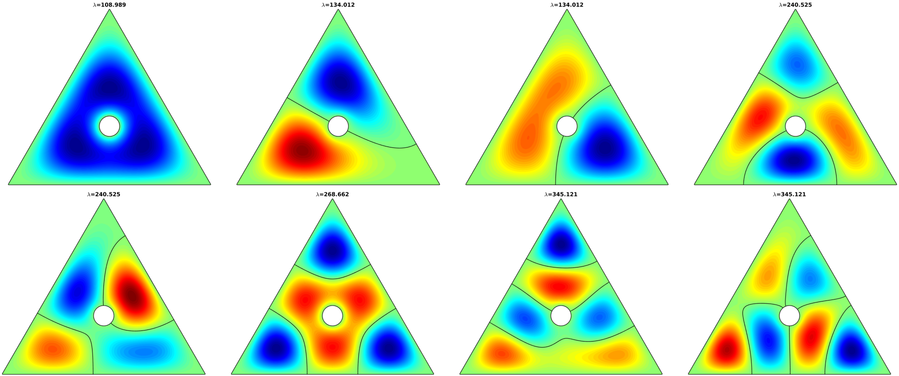
Trouver $(\lambda, u) \in \mathbb{C} \times \mathrm{H}^1(\Omega)$ tel que

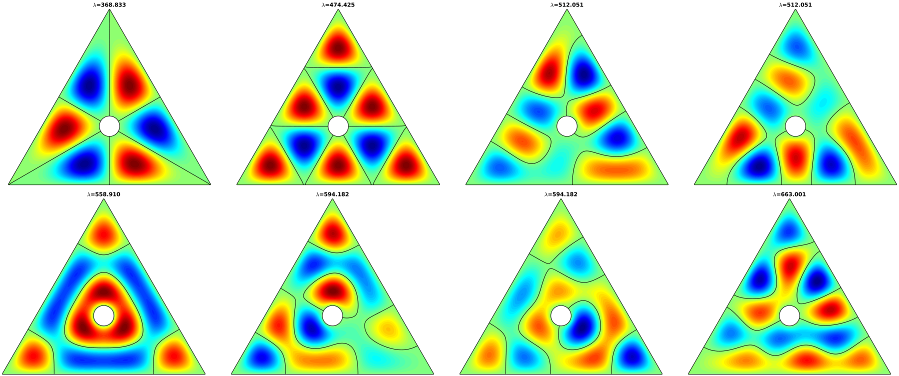
$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \qquad (12)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \qquad (13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{10} \qquad (14)$$




λ=108.989
λ=134.012
λ=134.012
λ=240.525
λ=240.525
λ=268.662
λ=345.121
λ=345.121


λ=368.833
λ=474.425
λ=512.051
λ=512.051
λ=558.910
λ=594.182
λ=594.182
λ=663.001