


Etude des valeurs propres et vecteurs propres du Laplacien

Cuvelier F.

2020/02/25

Un problème aux limites de type *Poisson* s'écrit sous la forme


 **Problème de Poisson**

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ tel que

$$-\Delta u = f \text{ dans } \Omega \subset \mathbb{R}^{\dim}, \quad (1)$$
$$u = g_D \text{ sur } \Gamma_D, \quad (2)$$
$$\frac{\partial u}{\partial n} + a_R u = g_R \text{ sur } \Gamma_R, \quad (3)$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^{\dim}$ avec $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_R$ et $\Gamma_D \cap \Gamma_R = \emptyset$.

Le problème aux valeurs propres associé s'écrit sous la forme

 **Problème aux valeurs propres de Poisson**

Trouver $(\lambda, u) \in \mathbb{C} \times H^1(\Omega)$ tel que


$$-\Delta u = \lambda u \text{ dans } \Omega \subset \mathbb{R}^{\dim}, \quad (4)$$
$$u = 0 \text{ sur } \Gamma_D, \quad (5)$$
$$\frac{\partial u}{\partial n} + a_R u = 0 \text{ sur } \Gamma_R, \quad (6)$$

L'objectif de ce projet est de déterminer numériquement des valeurs propres et vecteurs propres de ces problèmes en dimension $dim = 1, 2, \dots$ pour différentes types de conditions aux limites. Des exemples avec solutions analytiques seront proposés et permettront la validation des différents codes écrits. Une **méthode aux différences finies**, pour les problèmes 1D et 2D sur rectangle, sera implémentée. Pour des problèmes plus complexes, la **méthode des éléments finis** sera utilisée via des logiciels/outils fournis.

Les logiciels utilisés seront:

- Matlab et GNU Octave pour la partie *différences finies* et les représentations graphiques,
- GMSH pour la génération de maillages 2d (voir 3d),
- La toolbox Matlab/Octave FC-VFEM \mathbb{P}_1 pour la partie *éléments finis*,

1 Exemple 1

 **Problème aux valeurs propres de Poisson**

Trouver $(\lambda, u) \in \mathbb{C} \times H^1(\Omega)$ tel que

$$-\Delta u = \lambda u \text{ dans } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad (7)$$
$$u = 0 \text{ sur } \Gamma_D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \quad (8)$$

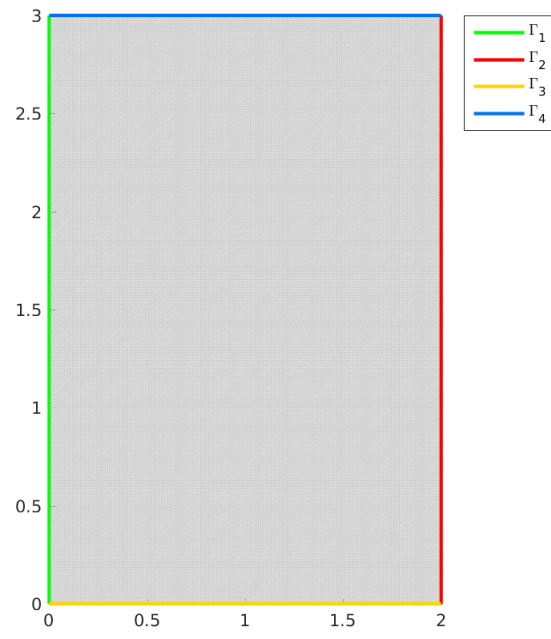


Figure 1: Boundaries of the rectangle $[0, 2] \times [0, 3]$

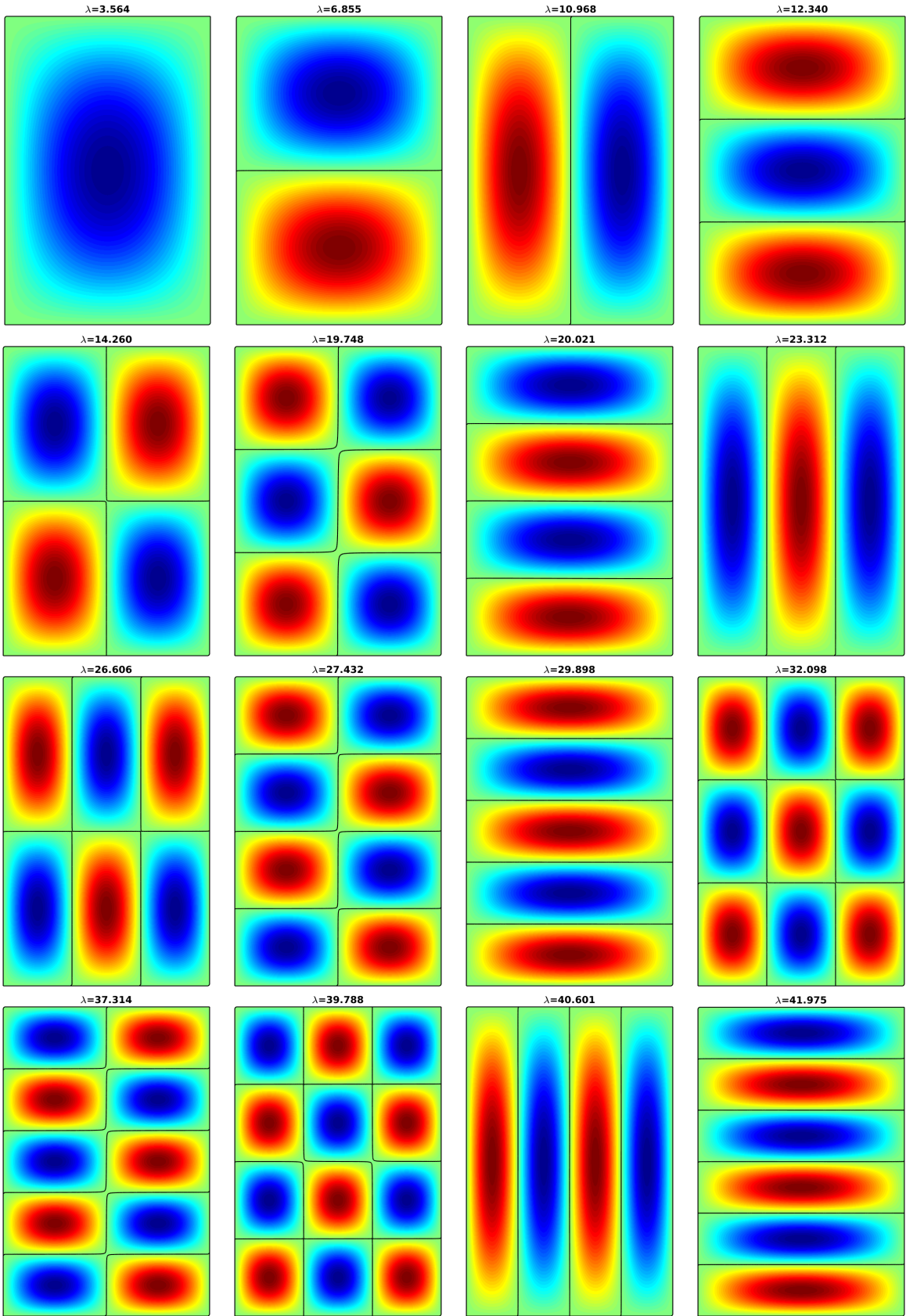


Figure 2: 2D Laplace in rectangle $[0, 2] \times [0, 3]$ with Dirichlet boundary conditions : eigenvectors of the smallest magnitude eigenvalues

2 Exemple 2



Problème aux valeurs propres de Poisson

Trouver $(\lambda, u) \in \mathbb{C} \times H^1(\Omega)$ tel que

$$-\Delta u = \lambda u \text{ dans } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad (9)$$

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma_D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \quad (10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_3 \cup \Gamma_4, \quad (11)$$

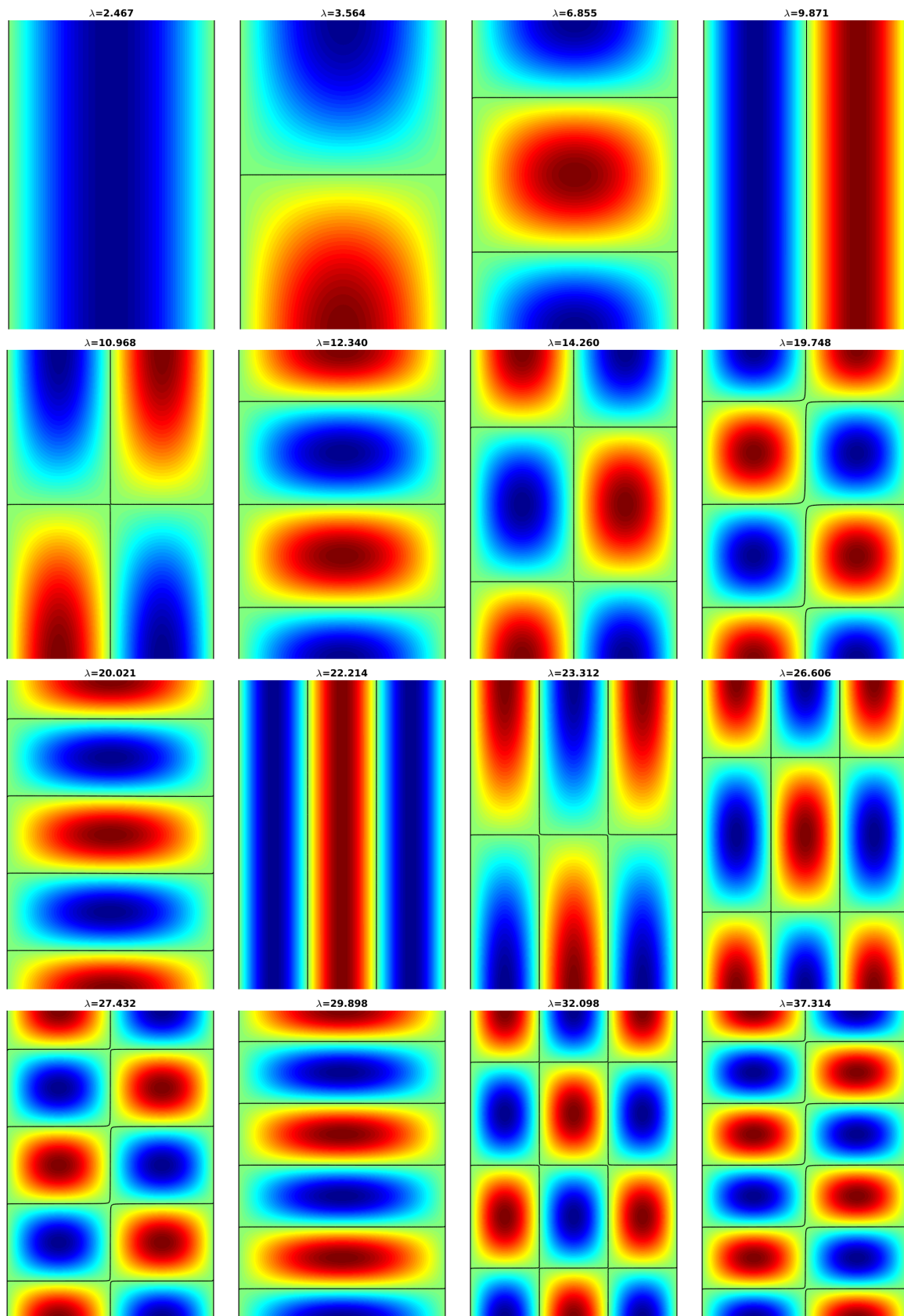


Figure 3: 2D Laplace in rectangle $[0, 2] \times [0, 3]$ with mixed boundary conditions : eigenvectors of the smallest magnitude eigenvalues

3 Exemple 3



Problème aux valeurs propres de Poisson

Trouver $(\lambda, u) \in \mathbb{C} \times H^1(\Omega)$ tel que

$$-\Delta u = \lambda u \text{ dans } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad (12)$$

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma_D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_{10} \quad (13)$$

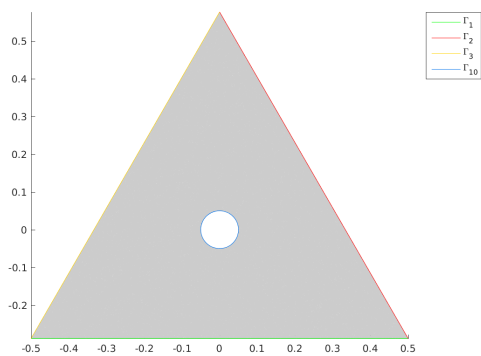


Figure 4: Boundaries of the triangle domaine with a hole

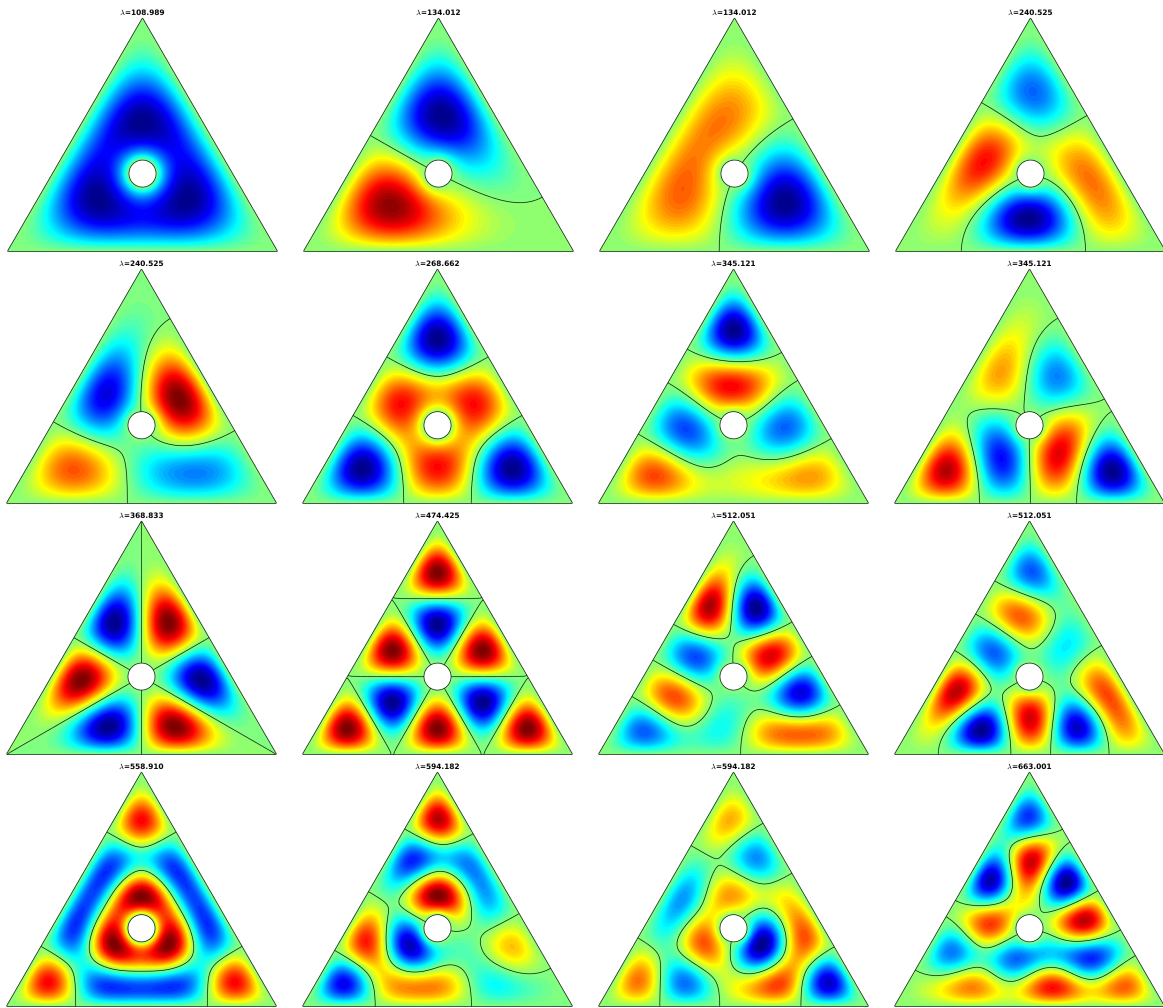


Figure 5: 2D Laplace in a triangle with one hole and Dirichlet boundary conditions : eigenvectors of the smallest magnitude eigenvalues

4 Exemple 4

💡 **Problème aux valeurs propres de Poisson**

Trouver $(\lambda, u) \in \mathbb{C} \times H^1(\Omega)$ tel que

$$-\Delta u = \lambda u \text{ dans } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \tag{14}$$

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma_D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \tag{15}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_{10}. \tag{16}$$

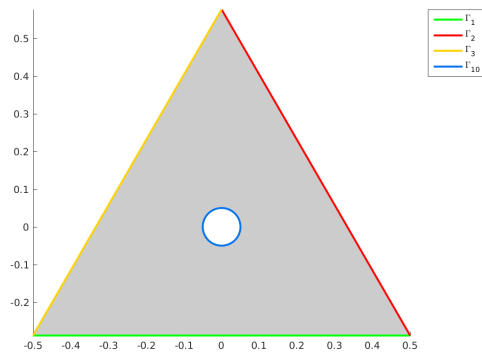


Figure 6: Boundaries of the triangle domain with a hole

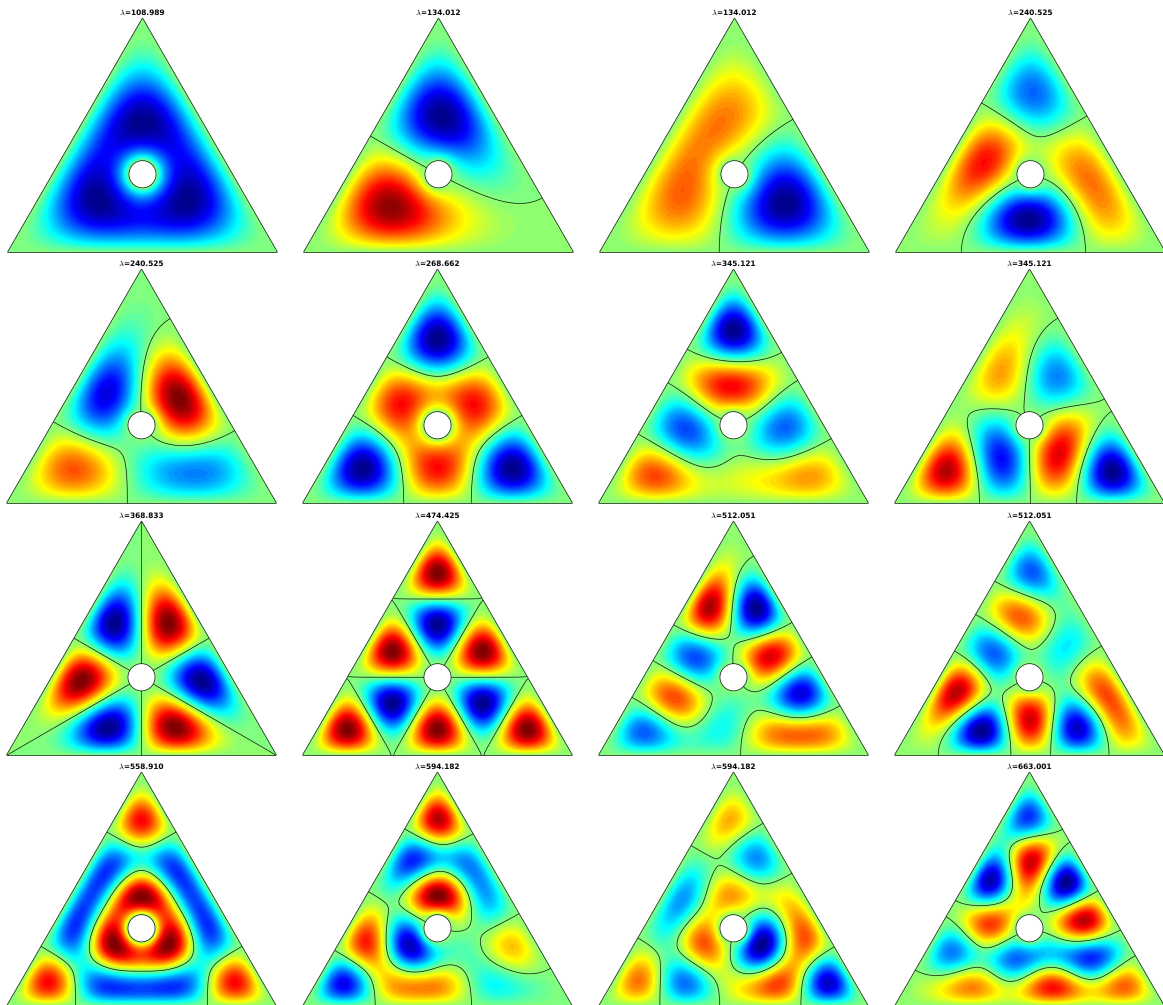


Figure 7: 2D Laplace in a triangle with one hole and mixed boundary conditions : eigenvectors of the smallest magnitude eigenvalues