TRAVAUX PRATIQUES - MÉTHODES DES DIFFÉRENCES FINIES

Différences finies pour les EDP 1D stationnaire

1 Problème modèle Dirichlet/Dirichlet

On souhaite résoudre par un schéma de type différences finies le problème suivant

$$-u''(x) = f(x),\ \forall x \in]a; b[\tag{1.1}$$
$$u(a) = u_a \in \mathbb{R} \tag{1.2}$$
$$u(b) = u_b \in \mathbb{R} \tag{1.3}$$

On peut prendre comme jeux de données $a = 1,\ b = \pi,\ f(x) = 4\cos(2x) - 9\sin(3x-1),\ u_a = \cos(2) - \sin(2)$ et $u_b = -\sin(3\pi - 1) + 1$. Dans ce cas la solution exacte est $u(x) = \cos(2x) - \sin(3x-1)$.

On définit la matrice associée au laplacien (en 1D opérateur dérivée seconde) discrétisé à l'ordre 2 par $\mathbb{K} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ avec

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Q. 1 1. *Ecrire une fonction `Lap1D` (fichier* Lap1D.m*) permettant de générer cette matrice.*

2. *Proposer plusieurs méthodes pour tester/valider cette fonction et les implémenter dans une fonction `validLap1D` ayant (au moins) comme argument la dimension de la matrice.* ■

Q. 2 *Ecrire un programme `Edp0` (fichier* Edp0.m*) permettant de de résoudre numériquement le problème (1.1)-(1.2)-(1.3) par un schéma différences finies d'ordre* 2*. Ce programme representera graphiquement la solution numérique obtenue, la solution exacte et l'erreur.* ■

Q. 3 *Ecrire le programme* OrdreEdp0 *(fichier* OrdreEDP0.m*) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas h de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode. Un exemple de représentation est donné en Figure 1.* ■

Q. 4 1. *Ecrire le programme* Edp1 *(fichier* Edp1.m*) permettant de calculer une solution approchée de :*

$$-u''(x) + \nu u(x) = f(x),\ \forall x \in]a; b[\tag{1.4}$$
$$u(a) = u_a \in \mathbb{R} \tag{1.5}$$
$$u(b) = u_b \in \mathbb{R} \tag{1.6}$$

avec $\nu \geqslant 0$. Avec un choix judicieux de données, ce programme représentera la solution approchée ainsi que la solution exacte.

2. *Ecrire le programme* OrdreEdp1 *(fichier* OrdreEDP1.m*) permettant de représenter, en échelle logarithmique, l'erreur en fonction du pas h de discrétisation et d'afficher l'ordre de la méthode. Le jeu de données sera choisi judicieusement.* ■

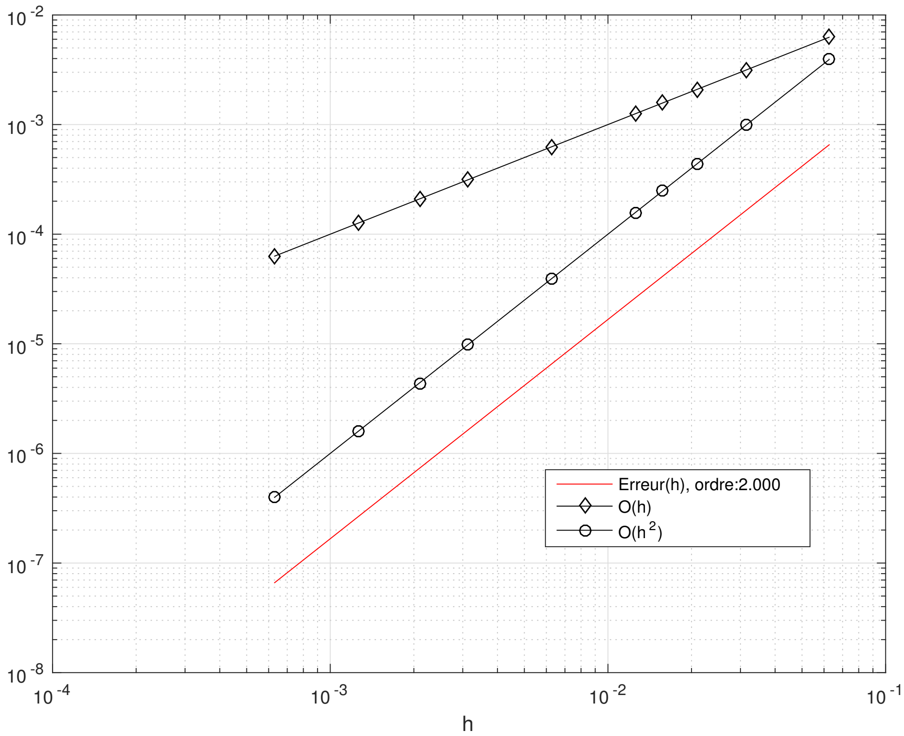

FIGURE 1 – Représentation de l'erreur en fonction de h

2 Problème modèle Neumann/Dirichlet

On cherche à résoudre par un schéma de type différences finies le problème suivant

$$-u''(x) = f(x), \ \forall x \in]a; b[\tag{2.1}$$

$$u'(a) = v_a \in \mathbb{R} \tag{2.2}$$

$$u(b) = u_b \in \mathbb{R} \tag{2.3}$$

On peut prendre comme jeux de données $a = 0, \ b = 2\pi, \ f(x) = \cos(x), \ v_a = 2$ et $u_b = 4\pi + 1$. Dans ce cas la solution exacte est $u(x) = \cos(x) + 2x$.

2.1 Neumann ordre 1

Dans la condition aux limites de Neumann (2.2), on va approcher $u'(a)$ à l'ordre 1 par $\frac{u(a+h)-u(a)}{h}$

Q. 5 *Ecrire le programme* Edp2 *(fichier* Edp2.m*) permettant de représenter une solution approchée du problème précédent.* ■

Q. 6 *Ecrire le programme* OrdreEdp2 *(fichier* OrdreEDP2.m*) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas h de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode.* ■

2.2 Neumann ordre 2

Dans la condition aux limites de Neumann (2.2), on va approcher $u'(a)$ à l'ordre 2 par $\frac{-u(a+2h)+4u(a+h)-3u(a)}{2h}$

Q. 7 *Ecrire le programme* Edp3 *(fichier* Edp3.m*) permettant de représenter une solution approchée du problème précédent.* ■

Q. 8 *Ecrire le programme* OrdreEdp3 *(fichier* OrdreEDP3.m*) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas h de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode.* ■

3 Problème modèle Dirichlet/Robin

On cherche à résoudre par un schéma de type différences finies le problème suivant

$$-u''(x) = f(x), \ \forall x \in]a;b[\tag{3.1}$$
$$u(a) = v_a \in \mathbb{R} \tag{3.2}$$
$$u(b) + \mu u'(b) = u_b \in \mathbb{R} \tag{3.3}$$

On peut prendre comme jeux de données $a = 0,\ b = 2\pi,\ f(x) = \cos(x),\ v_a = 1$ et $u_b = 2\mu + 4\pi + 1$. Dans ce cas la solution exacte est $u(x) = \cos(x) + 2x$.

3.1 Robin ordre 1

Dans la condition aux limites de Robin (3.2), on va approcher $u'(b)$ à l'ordre 1 par $\frac{u(b)-u(b-h)}{h}$

Q. 9 *Ecrire le programme* Edp4 *(fichier* Edp4.m*) permettant de représenter une solution approchée du problème précédent.* ■

Q. 10 *Ecrire le programme* OrdreEdp4 *(fichier* OrdreEDP4.m*) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas h de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode.* ■

3.2 Robin ordre 2

Q. 11

1. *Dans la condition aux limites de Robin (3.2), déterminer comment approcher $u'(b)$ à l'ordre 2.*
2. *Ecrire le programme* Edp5 *(fichier* Edp5.m*) permettant de représenter une solution approchée du problème précédent.* ■

Q. 12 *Ecrire le programme* OrdreEdp5 *(fichier* OrdreEDP5.m*) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas h de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode.* ■

4 Problème avec conditions aux limites génériques

On cherche à résoudre par un schéma de type différences finies le problème suivant

$$-u''(x) = f(x), \ \forall x \in]a;b[\tag{4.1}$$
$$\delta_a u(a) + \mu_a u'(a) = v_a \in \mathbb{R} \tag{4.2}$$
$$\delta_b u(b) + \mu_b u'(b) = v_b \in \mathbb{R} \tag{4.3}$$

où δ_a et δ_b sont donnés dans $\{0, 1\}$ et μ_a et μ_b sont deux réels donnés.

Q. 13

1. *Donner un jeu de valeurs δ_a, δ_b, μ_a, μ_b, pour lesquelles il n'y a pas trivialement unicité de la solution de* (4.1),(4.2),(4.3)*.*
2. *Ecrire une discrétisation à l'ordre* 2 *de chacune des condition aux limites.*
3. *Pour chacune des conditions écrire une fonction permettant de la prendre en compte dans le système linéaire.*
4. *Ecrire le programme* Edp6 *(fichier* Edp6.m*) permettant de représenter une solution approchée du problème précédent. Que se passe-t'il lorsqu'il n'y a pas unicité de la solution (théorique) ?*
5. *Ecrire le programme* OrdreEdp6 *(fichier* OrdreEDP6.m*) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas h de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode.* ■

5 Debut de généralisation

On cherche à résoudre par un schéma de type différences finies le problème suivant

$$-u''(x) + \nu u(x) = f(x), \ \forall x \in]a; b[\tag{5.1}$$
$$\delta_a u(a) + \mu_a u'(a) = v_a \in \mathbb{R} \tag{5.2}$$
$$\delta_b u(b) + \mu_b u'(b) = v_b \in \mathbb{R} \tag{5.3}$$

où ν est une constante. Les autres paramètres sont décrits dans la section précédente.
L'objectif ici est double : commencer une généralisation de l'EDP à résoudre et étudier le comportement de la solution numérique en fonction de ν. Il faut aussi noter que l'existence et l'unicité d'une solution à ce problème ne sont pas forcément assurées dans le cas général ! Toutefois, il est possible de les obtenir sous les hypothèses (non optimales)

$$\nu > 0, \quad \mu_a \leqslant 0 \quad \mu_b \geqslant 0$$

avec f suffisament régulière.

Q. 14
1. *Ecrire le programme* Edp7 *(fichier* Edp7.m*) permettant de représenter une solution approchée du problème précédent.*
2. *Ecrire le programme* OrdreEdp7 *(fichier* OrdreEDP7.m*) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas h de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode.* ∎

Pour regarder le comportement de la solution en fonction de ν on va tout d'abord résoudre par un schéma de type différences finies le problème aux valeurs propres : Trouver (λ, v) solution de

$$-v''(x) = \lambda v, \ \forall x \in]a; b[\tag{5.4}$$
$$\delta_a v(a) + \mu_a v'(a) = 0 \tag{5.5}$$
$$\delta_b v(b) + \mu_b v'(b) = 0 \tag{5.6}$$

On rappelle que pour le problème aux valeurs propres de Dirichlet ($\delta_a = \delta_b = 1$ et $\mu_a = \mu_b = 0$) avec $a = 0$ et $b = L$ les valeurs propres et vecteurs propres associés sont donnnés par

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2, \quad v_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{L}\right).$$

Q. 15 *On se place dans le cas $\delta_a = \delta_b = 1$, $\mu_a = \mu_b = 0$, $a = 0$ et $b = L$.*
1. *Proposer un schéma aux différences finies pour résoudre ce problème. Celui pourra alors s'écrire sous la forme*
$$\mathbb{A}\boldsymbol{v} = \lambda \mathbb{B}\boldsymbol{v}$$
où $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ sont des matrices et $\boldsymbol{v}$ un vecteur.
2. *A l'aide de la fonction* eigs *de Matlab (ou* eig *pour les matrices pleines), calculer les* 10 *valeurs propres les plus proches de* 0 *et representer les vecteurs propres associés. ($[V, D] \leftarrow \text{eigs}(\mathbb{A}, \mathbb{B}, 10, 0)$)*
3. *As t'on unicité de la solution de* (5.1)-(5.2)-(5.3) *si ν est l'opposé d'une des valeurs propres précédentes.*
4. *Vérifier ces résultats on choisissant judicieusement les paramètres du programme* Edp7. ∎

Q. 16 *On se place maintenant dans le cas général.*
1. *Proposer un schéma aux différences finies pour résoudre le problème aux valeurs propres* (5.4)-(5.5)-(5.6)*. Celui pourra alors s'écrire sous la forme*
$$\mathbb{A}\boldsymbol{v} = \lambda \mathbb{B}\boldsymbol{v}$$
où $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ sont des matrices et $\boldsymbol{v}$ un vecteur.
2. *A l'aide de la fonction* eigs *de Matlab (ou* eig *pour les matrices pleines), calculer les* 10 *valeurs propres les plus proches de* 0 *et representer les vecteurs propres associés. ($[V, D] \leftarrow \text{eigs}(\mathbb{A}, \mathbb{B}, 10, 0)$). Vérifier la pertinence des résultats trouver.*
3. *As t'on unicité de la solution de* (5.1)-(5.2)-(5.3) *si ν est l'opposé d'une des valeurs propres précédentes ?*
4. *Vérifier ces résultats on choisissant judicieusement les paramètres du programme* Edp7. ∎