$$\begin{cases} -\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f & \text{dans } \Omega = [a,b]\times[c,d] \subset \mathbb{R}^2 \quad (1) \\ u = g & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega \quad (2) \end{cases}$$

$x_i = a + ih_x \quad \forall i \in [\![0, N_x]\!] \quad h_x = \dfrac{b-a}{N_x}$

$y_j = c + jh_y \quad \forall j \in [\![0, N_y]\!] \quad h_y = \dfrac{d-c}{N_y}$

On note $U_{i,j} \sim u(x_i, y_j)$ solution du système

$$(1)\begin{cases} -\left(\dfrac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h_x^2} + \dfrac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{h_y^2}\right) = f_{i,j} & \forall i \in]\!]0, N_x[\![\\ & \forall j \in]\!]0, N_y[\![\\ U_{i,0} = g(x_i, c) & \forall i \in [\![0, N_x]\!] \\ U_{i,N_y} = g(x_i, d) & \forall i \in [\![0, N_x]\!] \\ U_{0,j} = g(a, y_j) & \forall j \in]\!]0, N_y[\![\\ U_{N_x,j} = g(b, y_j) & \text{"} \end{cases}$$

On pose $U = \begin{pmatrix} U_{:,0} \\ \hline U_{:,1} \\ \hline \vdots \\ \hline U_{:,N_y} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$ avec $N = (N_x+1)\times(N_y+1)$

et $U_{:,j} \in \mathbb{R}^{N_x+1}$ avec $U_{:,j} = \begin{pmatrix} U_{0,j} \\ \vdots \\ U_{N_x,j} \end{pmatrix}$

Q1/ Montrer que (1) s'écrit sous la forme d'un système linéaire bloc où chaque bloc est de taille $(N_x+1)\times(N_x+1)$ (matrice N_x+1 ligne par N_x+1 colonne)

$$AU = b \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c|cccc|c} \mathbb{E} & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ \hline \mathbb{M} & \mathbb{D} & \mathbb{M} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \mathbb{M} & \mathbb{D} & \mathbb{M} \\ \hline 0 & & & 0 & 0 & \mathbb{E} \end{array}\right) U = \begin{pmatrix} b_0 \\ \hline b_1 \\ \hline \vdots \\ \hline b_{N_y} \end{pmatrix}$$

expliciter les matrices $\mathbb{E}$, $\mathbb{M}$ et $\mathbb{D}$ ainsi que le vecteur second membre.

Q2) On note $F \in \mathbb{R}^N$ le vecteur bloc défini par

$$F = \begin{pmatrix} f_{:,0} \\ \hdashline f_{:,1} \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline f_{:,N_y} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad f_{:,j} = \begin{pmatrix} f_{0,j} \\ \vdots \\ f_{N_x,j} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N_x+1} \quad \forall j \in [\![0, N_x]\!]$$

$$\text{et} \quad f_{i,j} \overset{def}{=} f(x_i, y_j)$$

($f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction donnée)

Ecrire une fonction permettant d'initialiser calculer le vecteur F. ▨

Pour la suite on donne quelques fonctions Matlab qui peuvent être utiles

→ linspace

→ meshgrid

Exemple d'utilisation

```
x = linspace(a, b, Nx+1);
y = linspace(c, d, Ny+1);
[X,Y] = meshgrid(x, y);
g = @(x,y) cos(x+y).*sin(x-y);
GG = g(X,Y);
G = g(X(:), Y(:));
```

suite

```
GG1 = reshape(G, Nx+1, Ny+1);
% comparer GG et GG1 !
figure(1)
surf(x, y, GG)    ou surf(X, Y, GG)
figure(2)
surf(x, y, GG1)   ..
```

Q3) Reprendre la question 2 en écrivant une nouvelle fonction (n'utilisant pas les boucles mais s'inspirant de l'exemple précédant).

Comparer (les résultats) et les performances des deux fonctions

On a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j)}{h_x^2} + O(h_x^2) \qquad (3)$$

$$\forall i \in \,]\!]0, N_x[\![$$
$$\forall j \in \,]\!]0, N_y[\![$$

En 1D la matrice du "Laplacien" (ou dérivée seconde) peut s'écrire

$$\mathbb{K} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} h = (b-a)/N \\ \mathbb{K} \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R}) \end{array}$$

(voir Q_1 TP2 "Différences finies 1D" pour une écriture similaire)

Q_4) Programmer une fonction Lap1Dvec permettant sans boucle d'initialiser/calculer la matrice $\mathbb{K}$

Q_5) On a $g : (x,y) \mapsto \cos(x+y)\sin(x-y)$

et $\Delta g : (x,y) \mapsto -4\cos(x+y)\sin(x-y)$ $\quad \left(\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right)$

$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = -2\cos(x-y)\sin(x+y) - 2\cos(x+y)\sin(x-y)$ et.

On note $\mathbb{D}_{2x}$ la matrice bloc N par N définie $(N = (N_x+1) \times (N_y+1))$

$$\mathbb{D}_{2x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbb{K} & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \mathbb{K} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
G = g(X(:),Y(:)); (voir exemple page 2)
d2G = D2x*G;
...
```

permettant de calculer les dérivées secondes en x d'une fonction aux points strictement intérieurs de la grille.

Ecrire la fonction d2x_2D permettant de calculer cette matrice.

Proposer un code permettant de valider le calcul des dérivées secondes en x

Q6) "Imaginer" sur le même principe que la question 5 (attention piège) une fonction d2y_2D permettant de calculer une matrice qui permettra à l'aide d'un produit matrice vecteur de calculer les dérivées secondes en y d'une fonction aux points strictement intérieurs de la grille.
Proposer un code de validation

Q7) En utilisant les fonction des questions 5 et 6, ecrire la fonction Lap2D retournant une matrice N par N correspondant à la discretisation du Laplacien sur la grille.
Valider.