MACS 2 **Langage C/EDP**
Sup'Galilée **Année 2019-2020**

Travaux pratiques - Méthodes des différences finies [1]

Différences finies pour les EDP 1D stationnaires

Table des matières

Dans ce TP, nous utiliserons la librarie **SLAC** que nous avons développée ainsi que les codes **matwrapper** pour les représentations graphiques avec Matlab ou les codes **octwrapper** pour les représentations graphiques avec Octave.

1 E.D.P. modèle Dirichlet/Dirichlet

On souhaite résoudre par un schéma de type différences finies le problème suivant

$$-u''(x) = f(x), \ \forall x \in]a;b[\tag{1.1}$$
$$u(a) = u_a \in \mathbb{R} \tag{1.2}$$
$$u(b) = u_b \in \mathbb{R} \tag{1.3}$$

On peut prendre comme jeux de données $a = -1,\ b = \pi,\ f(x) = -4\cos(2x-1) + 9\sin(3x)$, $u_a = -\cos(3) - \sin(3)$ et $u_b = -\cos(-1)$. Dans ce cas la solution exacte est $u(x) = -\cos(2x-1) + \sin(3x)$.

On définit la matrice associée au laplacien (en 1D opérateur dérivée seconde) discrétisé à l'ordre 2 par $\mathbb{K} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ avec

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1. version du 6 novembre 2019 à 14:53

Q. 1 1. *Ecrire une fonction* *Lap1D* *(fichier* Lap1D.c*) permettant de générer cette matrice.*
2. *Proposer plusieurs méthodes pour tester/valider cette fonction et les implémenter dans une fonction* *validLap1D* *ayant (au moins) comme argument la dimension de la matrice.* ■

Q. 2 *Ecrire un programme* *Edp0* *(fichier* Edp0.c*) permettant de de résoudre numériquement le problème (1.1)-(1.2)-(1.3) par un schéma différences finies d'ordre* 2*. Ce programme représentera graphiquement la solution numérique obtenue, la solution exacte et l'erreur.* ■

Q. 3 *Ecrire le programme* *OrdreEdp0* *(fichier* OrdreEDP0.c*) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas h de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode. Un exemple de représentation est donné en Figure 1.* ■

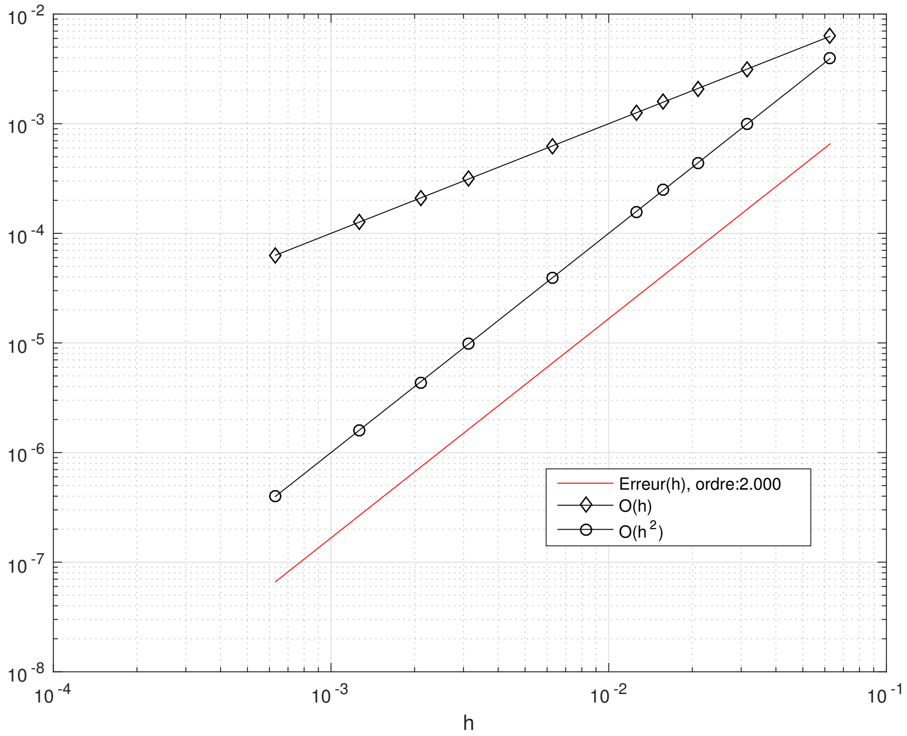

FIGURE 1 – Représentation de l'erreur en fonction de h

Q. 4 1. *Ecrire le programme* *Edp1* *(fichier* Edp1.c*) permettant de calculer une solution approchée de :*

$$-u''(x) + \nu u(x) = f(x), \ \forall x \in]a; b[\quad (1.4)$$
$$u(a) = u_a \in \mathbb{R} \quad (1.5)$$
$$u(b) = u_b \in \mathbb{R} \quad (1.6)$$

avec $\nu \geqslant 0$*. Avec un choix judicieux de données, ce programme representera graphiquement la solution numérique obtenue, la solution exacte et l'erreur.*

2. *Ecrire le programme* *OrdreEdp1* *(fichier* OrdreEDP1.c*) permettant de représenter, en échelle logarithmique, l'erreur en fonction du pas h de discrétisation et d'afficher l'ordre de la méthode. Le jeu de données sera choisi judicieusement.* ■

2 E.D.P. modèle Neumann/Dirichlet

On cherche à résoudre par un schéma de type différences finies le problème suivant

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x), \ \forall x \in]a;b[&& (2.1) \\ u'(a) &= v_a \in \mathbb{R} && (2.2) \\ u(b) &= u_b \in \mathbb{R} && (2.3) \end{aligned}$$

On peut prendre comme jeux de données $a = 0$, $b = 2\pi$, $f(x) = \cos(x)$, $v_a = 2$ et $u_b = 4\pi + 1$. Dans ce cas la solution exacte est $u(x) = \cos(x) + 2x$.

2.1 Neumann ordre 1

Dans la condition aux limites de Neumann (2.2), on va approcher $u'(a)$ à l'ordre 1 par $\frac{u(a+h)-u(a)}{h}$

Q. 5 *Ecrire le programme Edp2 (fichier* Edp2.c*) permettant de représenter une solution approchée du problème précédent. Avec un choix judicieux de données, ce programme representera graphiquement la solution numérique obtenue, la solution exacte et l'erreur.* ∎

Q. 6 *Ecrire le programme OrdreEdp2 (fichier* OrdreEDP2.c*) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas h de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode.* ∎

2.2 Neumann ordre 2

Dans la condition aux limites de Neumann (2.2), on va approcher $u'(a)$ à l'ordre 2 par $\frac{-u(a+2h)+4u(a+h)-3u(a)}{2h}$

Q. 7 *Ecrire le programme Edp3 (fichier* Edp3.c*) permettant de représenter une solution approchée du problème précédent. Avec un choix judicieux de données, ce programme representera graphiquement la solution numérique obtenue, la solution exacte et l'erreur.* ∎

Q. 8 *Ecrire le programme OrdreEdp3 (fichier* OrdreEDP3.c*) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas h de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode.* ∎

3 E.D.P. modèle Dirichlet/Robin

On cherche à résoudre par un schéma de type différences finies le problème suivant

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x), \ \forall x \in]a;b[&& (3.1) \\ u(a) &= v_a \in \mathbb{R} && (3.2) \\ u(b) + \mu u'(b) &= u_b \in \mathbb{R} && (3.3) \end{aligned}$$

On peut prendre comme jeux de données $a = 0$, $b = 2\pi$, $f(x) = \cos(x)$, $v_a = 1$ et $u_b = 2\mu + 4\pi + 1$. Dans ce cas la solution exacte est $u(x) = \cos(x) + 2x$.

3.1 Robin ordre 1

Dans la condition aux limites de Robin (3.2), on va approcher $u'(b)$ à l'ordre 1 par $\frac{u(b)-u(b-h)}{h}$

Q. 9 *Ecrire le programme* *Edp4* *(fichier* Edp4.c*) permettant de représenter une solution approchée du problème précédent. Avec un choix judicieux de données, ce programme representera graphiquement la solution numérique obtenue, la solution exacte et l'erreur.* ■

Q. 10 *Ecrire le programme* *OrdreEdp4* *(fichier* OrdreEDP4.c*) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas h de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode.* ■

3.2 Robin ordre 2

Q. 11

1. *Dans la condition aux limites de Robin (3.2), déterminer comment approcher $u'(b)$ à l'ordre* 2.
2. *Ecrire le programme* *Edp5* *(fichier* Edp5.c*) permettant de représenter une solution approchée du problème précédent. Avec un choix judicieux de données, ce programme representera graphiquement la solution numérique obtenue, la solution exacte et l'erreur.* ■

Q. 12 *Ecrire le programme* *OrdreEdp5* *(fichier* OrdreEDP5.c*) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas h de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode.* ■

4 E.D.P. avec conditions aux limites génériques

On cherche à résoudre par un schéma de type différences finies le problème suivant

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x),\ \forall x \in]a;b[&& (4.1)\\ \delta_a u(a) + \mu_a u'(a) &= v_a \in \mathbb{R} && (4.2)\\ \delta_b u(b) + \mu_b u'(b) &= v_b \in \mathbb{R} && (4.3) \end{aligned}$$

où δ_a et δ_b sont donnés dans $\{0,1\}$ et μ_a et μ_b sont deux réels donnés.

Q. 13

1. *Donner un jeu de valeurs δ_a, δ_b, μ_a, μ_b, pour lesquelles il n'y a pas trivialement unicité de la solution de* (4.1),(4.2),(4.3).
2. *Ecrire une discrétisation à l'ordre* 2 *de chacune des condition aux limites.*
3. *Pour chacune des conditions écrire une fonction permettant de la prendre en compte dans le système linéaire.*
4. *Ecrire le programme* *Edp6* *(fichier* Edp6.c*) permettant de représenter une solution approchée du problème précédent. Que se passe-t'il lorsqu'il n'y a pas unicité de la solution (théorique) ?*
5. *Ecrire le programme* *OrdreEdp6* *(fichier* OrdreEDP6.c*) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas h de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode.* ■