

TRAVAUX PRATIQUES - MÉTHODES DES DIFFÉRENCES FINIES <sup>1</sup>

Différences finies pour les EDP 1D stationnaire

## Table des matières

1	Approximation de dérivées premières	1
2	Approximation de dérivées secondes	3
3	E.D.P. modèle Dirichlet/Dirichlet	3
4	E.D.P. modèle Neumann/Dirichlet	5
4.1	Neumann ordre 1 . . . . .	5
4.2	Neumann ordre 2 . . . . .	6
5	E.D.P. modèle Dirichlet/Robin	6
5.1	Robin ordre 1 . . . . .	6
5.2	Robin ordre 2 . . . . .	6
6	E.D.P. avec conditions aux limites génériques	7
7	Debut de généralisation et valeurs propres	7

## 1 Approximation de dérivées premières

Soit  $f$  une fonction définie sur l'intervalle  $[a, b]$  et suffisamment régulière.

**Q. 1** *Montrer que l'on a*

$$f'(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x})}{h} + \mathcal{O}(h) \tag{1.1}$$

$$f'(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x}) - f(\bar{x} - h)}{h} + \mathcal{O}(h) \tag{1.2}$$

**Q. 2** *On note  $x_i = a + ih$ ,  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , une discrétisation régulière de l'intervalle  $[a, b]$ . Soit une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  suffisamment régulière. On suppose que les  $y_i$  sont donnés par*

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \tag{1.3}$$

*Ecrire une fonction [Derive1](#) permettant de calculer des approximations d'ordre 1 de  $f'(x_i)$  pour  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .* ■

---

1. version du 16 novembre 2020 à 05:41

Pour obtenir une formule d'approximation d'ordre 2 de  $f'(\bar{x})$ , on suppose  $f \in \mathcal{C}^3([a, b])$  et on peut alors développer les formules de Taylor de  $f(\bar{x} + h)$  et  $f(\bar{x} - h)$  jusqu'au troisième ordre. On obtient alors

$$f'(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x} - h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2). \quad (1.4)$$

- Cette approximation est la formule des **différences finies centrées**.
- Cette approximation est d'ordre 2.

**Q. 3** Montrer que l'on a les deux formules suivantes

$$f'(\bar{x}) = -\frac{f(\bar{x} + 2h) - 4f(\bar{x} + h) + 3f(\bar{x})}{2h} + \mathcal{O}(h^2), \quad (1.5)$$

$$f'(\bar{x}) = \frac{3f(\bar{x}) - 4f(\bar{x} - h) + f(\bar{x} - 2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2). \quad (1.6)$$

**Q. 4** On note  $x_i = a + ih$ ,  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , une discrétisation régulière de l'intervalle  $[a, b]$ . Soit une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  suffisamment régulière. On suppose que les  $y_i$  sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (1.7)$$

Ecrire une fonction `Derive2` permettant de calculer des approximations d'ordre 2 de  $f'(x_i)$  pour  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

**Q. 5** Ecrire un programme, nommé `erreurDerive`, permettant de vérifier graphiquement, pour chacune des 2 fonctions précédentes, l'ordre des erreurs. voir figure 1.

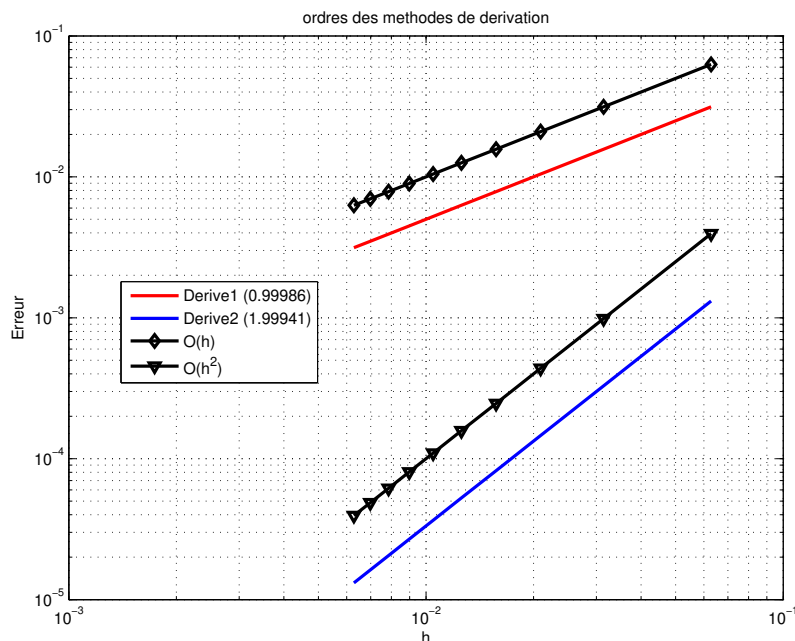


FIGURE 1 – Ordre de l'erreur des méthodes de dérivation

## 2 Approximation de dérivées secondes

L'objectif ici est déterminer une approximation d'ordre 2 de la dérivée seconde d'une fonction  $f$  (suffisamment régulière) en les points d'une discrétisation régulière  $x_i = a + ih$ ,  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , de l'intervalle  $[a, b]$ .

**Q. 6** 1. Montrer que l'on a la formule suivante utilisant deux points de part et d'autres de  $\bar{x}$  :

$$f^{(2)}(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x} + h) - 2f(\bar{x}) + f(\bar{x} - h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \quad (2.1)$$

2. On va établir une formule n'utilisant que des points après  $\bar{x}$ . Pour cela montrer que

$$h^2 f^{(2)}(\bar{x}) = f(\bar{x}) - 2f(\bar{x} + h) + f(\bar{x} + 2h) - h^3 f^{(3)}(\bar{x}) + \mathcal{O}(h^4), \quad (2.2)$$

$$3h^2 f^{(2)}(\bar{x}) = 2f(\bar{x}) - 3f(\bar{x} + h) + f(\bar{x} + 3h) - 4h^3 f^{(3)}(\bar{x}) + \mathcal{O}(h^4). \quad (2.3)$$

Puis en déduire

$$f^{(2)}(\bar{x}) = \frac{2f(\bar{x}) - 5f(\bar{x} + h) + 4f(\bar{x} + 2h) - f(\bar{x} + 3h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2). \quad (2.4)$$

3. Etablir la formule suivante n'utilisant que des points avant  $\bar{x}$  :

$$f^{(2)}(\bar{x}) = \frac{2f(\bar{x}) - 5f(\bar{x} - h) + 4f(\bar{x} - 2h) - f(\bar{x} - 3h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2). \quad (2.5)$$

**Q. 7** Ecrire une fonction `DeriveSec2` permettant de calculer des approximations d'ordre 2 de  $f^{(2)}(x_i)$  pour  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . ■

**Q. 8** Ecrire un programme, nommé `erreurDeriveSeconde`, permettant de vérifier/retrouver graphiquement, l'ordre de la méthode d'approximation précédente. voir figure 2. ■

## 3 E.D.P. modèle Dirichlet/Dirichlet

On souhaite résoudre par un schéma de type différences finies le problème suivant

$$-u''(x) = f(x), \quad \forall x \in ]a; b[ \quad (3.1)$$

$$u(a) = u_a \in \mathbb{R} \quad (3.2)$$

$$u(b) = u_b \in \mathbb{R} \quad (3.3)$$

On peut prendre comme jeux de données  $a = -1$ ,  $b = \pi$ ,  $f(x) = -4 \cos(2x - 1) + 9 \sin(3x)$ ,  $u_a = -\cos(3) - \sin(3)$  et  $u_b = -\cos(-1)$ . Dans ce cas la solution exacte est  $u(x) = -\cos(2x - 1) + \sin(3x)$ .

On définit la matrice associée au laplacien (en 1D opérateur dérivée seconde) discrétisé à l'ordre 2 par  $\mathbb{K} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$  avec

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

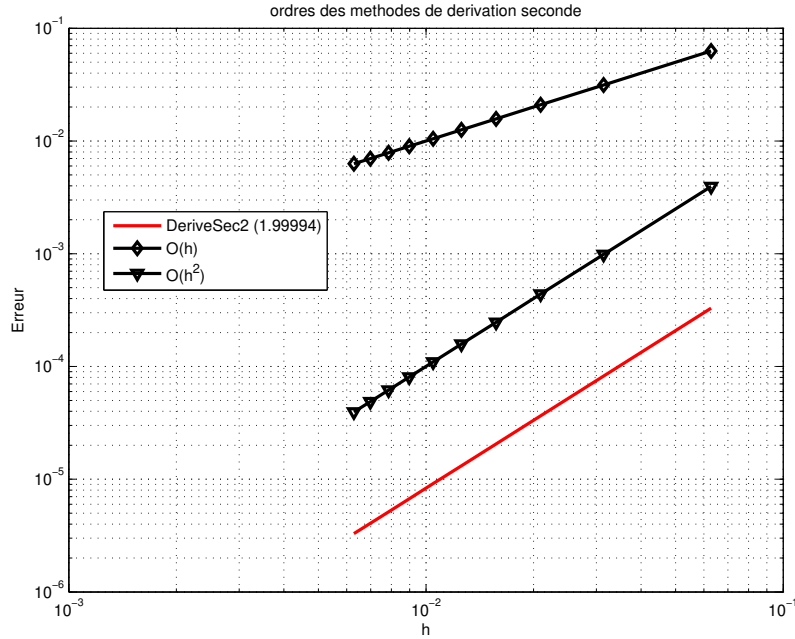


FIGURE 2 – Ordre de l’erreur de l’approximation de la dérivée seconde

- Q. 9** 1. Ecrire une fonction `Lap1D` (fichier `Lap1D.m`) permettant de générer cette matrice.
2. Proposer plusieurs méthodes pour tester/valider cette fonction et les implémenter dans une fonction `validLap1D` ayant (au moins) comme argument la dimension de la matrice.
- 

**Q. 10** Ecrire un programme `Edp0` (fichier `Edp0.m`) permettant de résoudre numériquement le problème (3.1)-(3.2)-(3.3) par un schéma différences finies d’ordre 2. Ce programme représentera graphiquement la solution numérique obtenue, la solution exacte et l’erreur. ■

**Q. 11** Ecrire le programme `OrdreEdp0` (fichier `OrdreEDP0.m`) permettant de représenter l’erreur en fonction du pas  $h$  de discrétisation en échelle logarithmique et d’afficher l’ordre de la méthode. Un exemple de représentation est donné en Figure 3. ■

- Q. 12** 1. Ecrire le programme `Edp1` (fichier `Edp1.m`) permettant de calculer une solution approchée de :

$$-u''(x) + \nu u(x) = f(x), \quad \forall x \in ]a; b[ \quad (3.4)$$

$$u(a) = u_a \in \mathbb{R} \quad (3.5)$$

$$u(b) = u_b \in \mathbb{R} \quad (3.6)$$

avec  $\nu \geq 0$ . Avec un choix judicieux de données, ce programme représentera graphiquement la solution numérique obtenue, la solution exacte et l’erreur.

2. Ecrire le programme `OrdreEdp1` (fichier `OrdreEDP1.m`) permettant de représenter, en échelle logarithmique, l’erreur en fonction du pas  $h$  de discrétisation et d’afficher l’ordre de la méthode. Le jeu de données sera choisi judicieusement. ■

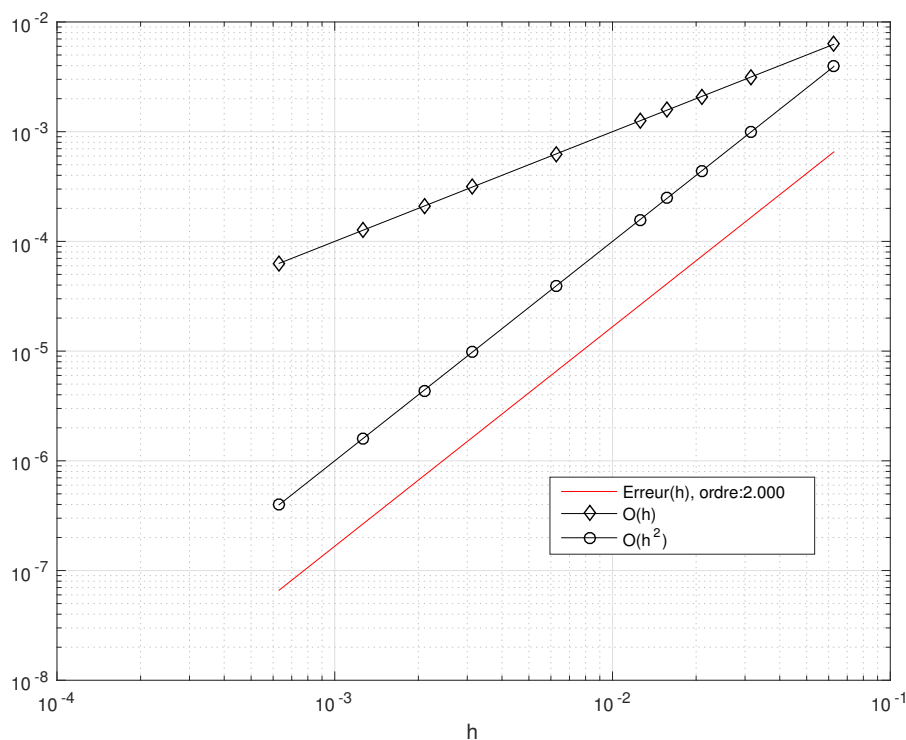


FIGURE 3 – Représentation de l’erreur en fonction de  $h$

## 4 E.D.P. modèle Neumann/Dirichlet

On cherche à résoudre par un schéma de type différences finies le problème suivant

$$-u''(x) = f(x), \quad \forall x \in ]a; b[ \quad (4.1)$$

$$u'(a) = v_a \in \mathbb{R} \quad (4.2)$$

$$u(b) = u_b \in \mathbb{R} \quad (4.3)$$

On peut prendre comme jeux de données  $a = 0$ ,  $b = 2\pi$ ,  $f(x) = \cos(x)$ ,  $v_a = 2$  et  $u_b = 4\pi + 1$ . Dans ce cas la solution exacte est  $u(x) = \cos(x) + 2x$ .

### 4.1 Neumann ordre 1

Dans la condition aux limites de Neumann (4.2), on va approcher  $u'(a)$  à l’ordre 1 par  $\frac{u(a+h)-u(a)}{h}$

**Q. 13** *Ecrire le programme [Edp2](#) (fichier Edp2.m) permettant de représenter une solution approchée du problème précédent. Avec un choix judicieux de données, ce programme représentera graphiquement la solution numérique obtenue, la solution exacte et l’erreur.* ■

**Q. 14** *Ecrire le programme [OrdreEdp2](#) (fichier OrdreEDP2.m) permettant de représenter l’erreur en fonction du pas  $h$  de discrétisation en échelle logarithmique et d’afficher l’ordre de la méthode.* ■

## 4.2 Neumann ordre 2

Dans la condition aux limites de Neumann (4.2), on va approcher  $u'(a)$  à l'ordre 2 par  $\frac{-u(a+2h)+4u(a+h)-3u(a)}{2h}$

**Q. 15** *Ecrire le programme [Edp3](#) (fichier Edp3.m) permettant de représenter une solution approchée du problème précédent. Avec un choix judicieux de données, ce programme représentera graphiquement la solution numérique obtenue, la solution exacte et l'erreur.* ■

**Q. 16** *Ecrire le programme [OrdreEdp3](#) (fichier OrdreEDP3.m) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas  $h$  de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode.* ■

## 5 E.D.P. modèle Dirichlet/Robin

On cherche à résoudre par un schéma de type différences finies le problème suivant

$$-u''(x) = f(x), \forall x \in ]a; b[ \quad (5.1)$$

$$u(a) = v_a \in \mathbb{R} \quad (5.2)$$

$$u(b) + \mu u'(b) = u_b \in \mathbb{R} \quad (5.3)$$

On peut prendre comme jeux de données  $a = 0$ ,  $b = 2\pi$ ,  $f(x) = \cos(x)$ ,  $v_a = 1$  et  $u_b = 2\mu + 4\pi + 1$ . Dans ce cas la solution exacte est  $u(x) = \cos(x) + 2x$ .

### 5.1 Robin ordre 1

Dans la condition aux limites de Robin (5.2), on va approcher  $u'(b)$  à l'ordre 1 par  $\frac{u(b)-u(b-h)}{h}$

**Q. 17** *Ecrire le programme [Edp4](#) (fichier Edp4.m) permettant de représenter une solution approchée du problème précédent. Avec un choix judicieux de données, ce programme représentera graphiquement la solution numérique obtenue, la solution exacte et l'erreur.* ■

**Q. 18** *Ecrire le programme [OrdreEdp4](#) (fichier OrdreEDP4.m) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas  $h$  de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode.* ■

### 5.2 Robin ordre 2

**Q. 19** 1. *Dans la condition aux limites de Robin (5.2), déterminer comment approcher  $u'(b)$  à l'ordre 2.*

2. *Ecrire le programme [Edp5](#) (fichier Edp5.m) permettant de représenter une solution approchée du problème précédent. Avec un choix judicieux de données, ce programme représentera graphiquement la solution numérique obtenue, la solution exacte et l'erreur.* ■

**Q. 20** *Ecrire le programme [OrdreEdp5](#) (fichier OrdreEDP5.m) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas  $h$  de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode.* ■

## 6 E.D.P. avec conditions aux limites génériques

On cherche à résoudre par un schéma de type différences finies le problème suivant

$$-u''(x) = f(x), \quad \forall x \in ]a; b[ \quad (6.1)$$

$$\delta_a u(a) + \mu_a u'(a) = v_a \in \mathbb{R} \quad (6.2)$$

$$\delta_b u(b) + \mu_b u'(b) = v_b \in \mathbb{R} \quad (6.3)$$

où  $\delta_a$  et  $\delta_b$  sont donnés dans  $\{0, 1\}$  et  $\mu_a$  et  $\mu_b$  sont deux réels donnés.

- Q. 21**
1. Donner un jeu de valeurs  $\delta_a, \delta_b, \mu_a, \mu_b$ , pour lesquelles il n'y a pas trivialement unicité de la solution de (6.1),(6.2),(6.3).
  2. Ecrire une discrétisation à l'ordre 2 de chacune des conditions aux limites.
  3. Pour chacune des conditions écrire une fonction permettant de la prendre en compte dans le système linéaire.
  4. Ecrire le programme `Edp6` (fichier `Edp6.m`) permettant de représenter une solution approchée du problème précédent. Que se passe-t-il lorsqu'il n'y a pas unicité de la solution (théorique) ?
  5. Ecrire le programme `OrdreEdp6` (fichier `OrdreEDP6.m`) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas  $h$  de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode. ■

## 7 Debut de généralisation et valeurs propres

On cherche à résoudre par un schéma de type différences finies le problème suivant

$$-u''(x) + \nu u(x) = f(x), \quad \forall x \in ]a; b[ \quad (7.1)$$

$$\delta_a u(a) + \mu_a u'(a) = v_a \in \mathbb{R} \quad (7.2)$$

$$\delta_b u(b) + \mu_b u'(b) = v_b \in \mathbb{R} \quad (7.3)$$

où  $\nu$  est une constante. Les autres paramètres sont décrits dans la section précédente.

L'objectif ici est double : commencer une généralisation de l'EDP à résoudre et étudier le comportement de la solution numérique en fonction de  $\nu$ . Il faut aussi noter que l'existence et l'unicité d'une solution à ce problème ne sont pas forcément assurées dans le cas général! Toutefois, il est possible de les obtenir sous les hypothèses (non optimales)

$$\nu > 0, \quad \mu_a \leq 0 \quad \mu_b \geq 0$$

avec  $f$  suffisamment régulière.

- Q. 22**
1. Ecrire le programme `Edp7` (fichier `Edp7.m`) permettant de représenter une solution approchée du problème précédent.
  2. Ecrire le programme `OrdreEdp7` (fichier `OrdreEDP7.m`) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas  $h$  de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode. ■

Pour regarder le comportement de la solution en fonction de  $\nu$  on va tout d'abord résoudre par un schéma de type différences finies le problème aux valeurs propres : Trouver  $(\lambda, v)$  solution de

$$-v''(x) = \lambda v(x), \quad \forall x \in ]a; b[ \quad (7.4)$$

$$\delta_a v(a) + \mu_a v'(a) = 0 \quad (7.5)$$

$$\delta_b v(b) + \mu_b v'(b) = 0 \quad (7.6)$$

On rappelle que pour le problème aux valeurs propres de Dirichlet ( $\delta_a = \delta_b = 1$  et  $\mu_a = \mu_b = 0$ ) avec  $a = 0$  et  $b = L$  les valeurs propres et vecteurs propres associés sont donnés par

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2, \quad v_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right).$$

**Q. 23** On se place dans le cas  $\delta_a = \delta_b = 1$ ,  $\mu_a = \mu_b = 0$ ,  $a = 0$  et  $b = L$ .

1. Proposer un schéma aux différences finies pour résoudre ce problème. Celui-ci pourra alors s'écrire sous la forme

$$\mathbb{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbb{B}\mathbf{v}$$

où  $\mathbb{A}$  et  $\mathbb{B}$  sont des matrices et  $\mathbf{v}$  un vecteur.

2. A l'aide de la fonction `eigs` de Matlab (ou `eig` pour les matrices pleines), calculer les 10 valeurs propres les plus proches de 0 et représenter les vecteurs propres associés. (`[V, D] ← eigs(A, B, 10, 0)`)
3. As t'on unicité de la solution de (7.1)-(7.2)-(7.3) si  $\nu$  est l'opposé d'une des valeurs propres précédentes.
4. Vérifier ces résultats on choisissant judicieusement les paramètres du programme [Edp7](#).

■

**Q. 24** On se place maintenant dans le cas général.

1. Proposer un schéma aux différences finies pour résoudre le problème aux valeurs propres (7.4)-(7.5)-(7.6). Celui pourra alors s'écrire sous la forme

$$\mathbb{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbb{B}\mathbf{v}$$

où  $\mathbb{A}$  et  $\mathbb{B}$  sont des matrices et  $\mathbf{v}$  un vecteur.

2. A l'aide de la fonction `eigs` de Matlab (ou `eig` pour les matrices pleines), calculer les 10 valeurs propres les plus proches de 0 et représenter les vecteurs propres associés. (`[V, D] ← eigs(A, B, 10, 0)`). Vérifier la pertinence des résultats trouver.
3. As t'on unicité de la solution de (7.1)-(7.2)-(7.3) si  $\nu$  est l'opposé d'une des valeurs propres précédentes ?
4. Vérifier ces résultats on choisissant judicieusement les paramètres du programme [Edp7](#).

■