Ing. Macs 2 *Année 2021-2022*

TPs EDP [a]

Travaux Pratiques N^o 2

•••••••

Algorithmique : génération de maillages

a. Version du 11 octobre 2021

- Les questions **en autonomie** seront à faire en dehors des TPs encadrés.
- Pour l'ensemble des questions, un **travail sur feuilles** est primordial : la méthode *essais/erreurs* employée très régulièrement par les étudiants risque d'aboutir à des fonctions complexes et difficile à débugguer.

1 Introduction

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^2$.

Definition 1 *On appelle triangulation de Ω, une famille $\mathcal{T}_h$ de triangles T_k, $k = 1, \ldots, n_{\mathrm{me}}$,[1] ayant les propriétés suivantes :*

(i) l'intersection entre deux triangles distincts est soit vide, soit réduite à une coté entier ou à un point ;

(ii) tous les coins de la frontière Γ sont des sommets de triangles de $\mathcal{T}_h$;

(iii) réciproquement, soit

$$\Omega_h = \bigcup_{k=1}^{n_{\mathrm{me}}} T_k \tag{0.1}$$

(remarquer que Ω_h est fermé) ; tous les coins de $\Gamma_h = \partial\Omega_h$ doivent être sur Γ;

1. n_{me} *number of mesh elements*

(iv) les triangles ne sont pas dégénérés, ie. ils ne sont pas d'aire nulle.

Remarque 1 *nous avons*

$$\Omega_h = \bigcup_{k=1}^{n_{\mathrm{me}}} T_k \quad et \quad \bigcap_{k=1}^{n_{\mathrm{me}}} \overset{\circ}{T}_k = \varnothing \tag{0.2}$$

En Figure 1, deux exemples de triangulation sont représentés.

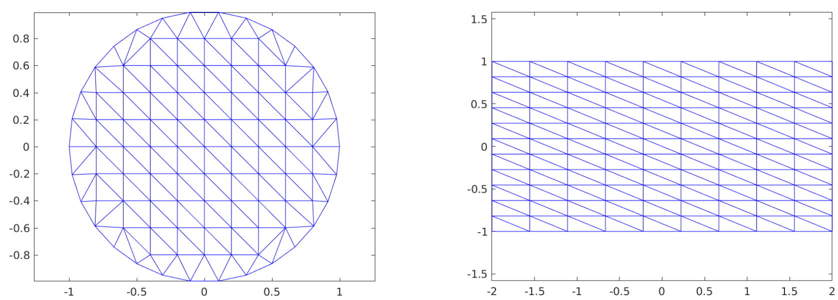
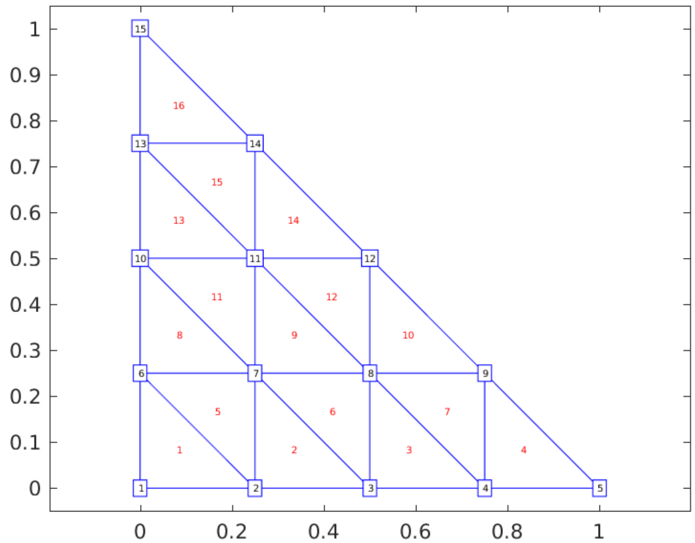


FIGURE 1 – Maillages triangulaires du disque unité (à gauche) et du rectangle $[-2, 2] \times [-1, 1]$ (à droite).

Pour stocker les informations (minimales) relatives à un maillage, on utilise les tableaux $\boldsymbol{q}$ et $\boldsymbol{me}$ respectivements tableau des sommets/points et tableau de connectivité :

nom	**type**	**dimension**	**descriptif**
n_q	entier	1	nombre total de noeuds (sommets) du maillage
n_{me}	entier	1	nombre de triangles
q	réels	$2 \times n_q$	q(il , i) est la il-ème coordonnée du i-ème sommet, il $\in \{1, 2\}$ et i $\in \{1, \dots, n_q\}$. Le i-ème sommet sera aussi noté $\boldsymbol{q}^i = (\boldsymbol{q}^i_x, \boldsymbol{q}^i_y)$ avec $\boldsymbol{q}^i_x =$ q(1, i) et $\boldsymbol{q}^i_y =$ q(2, i)
me	entier	$3 \times n_{\mathrm{me}}$	me(jl,k) indice de stockage, dans le tableau q , du jl-ème sommet du triangle d'indice k, jl $\in \{1, 2, 3\}$ et k $\in \{1, \dots, n_{\mathrm{me}}\}$. Pour tout triangle la numérotation des points est dans le **sens direct**. q (:, me(1,k)) est le 1er sommet du k-ème triangle, q (:, me(2,k)) est le 2ème sommet, ...

Voici sur un exemple le contenu des tableaux q et me sur un maillage du triangle unité :



Les nombres rouges sont les numéros des triangles (relativement au tableau me) et les nombres bleus les numéros des points (relativement au tableau q).

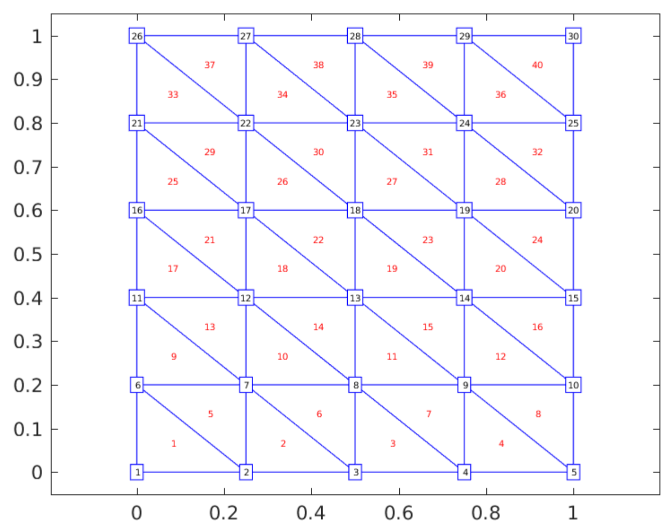
```
q =

  Columns 1 through 7

        0    0.2500    0.5000    0.7500    1.0000         0    0.2500
        0         0         0         0         0    0.2500    0.2500

  Columns 8 through 14

   0.5000    0.7500         0    0.2500    0.5000         0    0.2500
   0.2500    0.2500    0.5000    0.5000    0.5000    0.7500    0.7500

  Column 15

        0
   1.0000


me =

  Columns 1 through 13

    1     2     3     4     2     3     4     6     7     8     7     8    10
    2     3     4     5     7     8     9     7     8     9    11    12    11
    6     7     8     9     6     7     8    10    11    12    10    11    13

  Columns 14 through 16

   11    11    13
   12    14    14
   14    13    15
```

L'archive fournie `meshes.zip` contient plusieurs fichiers `.mat`. Chacun de ces fichiers correspond à un maillage donné contenant le tableau des points q et le tableau de connectivité me . Pour lire le fichier `unitsquaremesh_5_6.mat` sous Matlab, on peut utiliser la commande **load** pour initialiser les tableaux q et

me :
load unitsquaremesh_5_6.mat

Q. 1 *Ecrire une fonction* ba=barycenters(q,me) *retournant le tableau* `ba` *de dimension* $2 \times n_{\mathrm{me}}$ *tel que* $ba(:,k)$ *soit le barycentre du* k*-eme triangle spécifié par le tableau des sommets* q *et le tableau de connectivité* me *.* ■

L'archive fournie `plotfuns.zip` contient des fonctions permettant de représenter un maillage, d'afficher les numéros des sommets, des triangles... La fonction plotElementsNumber utilise la fonction barycenters qui vient d'être écrite. Voir Listing 1 pour un exemple d'utilisation.



Listing 1 – Exemple d'utilisation de la fonction plotmeshnumbers

```
load unitsquaremesh_5_6.mat
plotmeshnumbers(q,me)
axis equal
```

2 Génération de maillages

Q. 2 *Ecrire une fonction* [q,me]=unitsquaremesh(Nx,Ny) *retournant les tableaux de points et de connectivité associé au carré unité* $[0,1] \times [0,1]$ *avec* Nx *points suivant* x *et* Ny *points suivant* y *comme décrit en Figure 2.*

Q. 3 *Ecrire une fonction* [q,me]=rectmesh(a,b,c,d,Nx,Ny) *retournant les tableaux de points et de connectivité associé au rectangle* $[a,b] \times [c,d]$ *avec* Nx *points suivant* x *et* Ny *points suivant* y *comme décrit en Figure 3.*

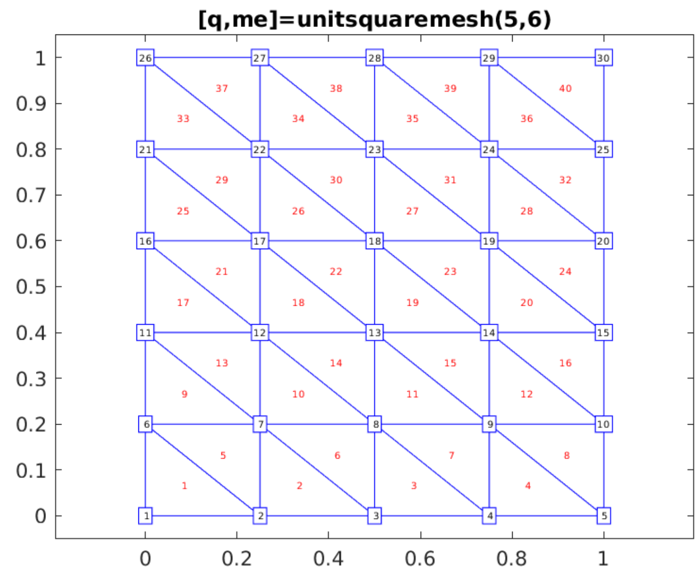


FIGURE 2 – Maillage triangulaire du carré unité.

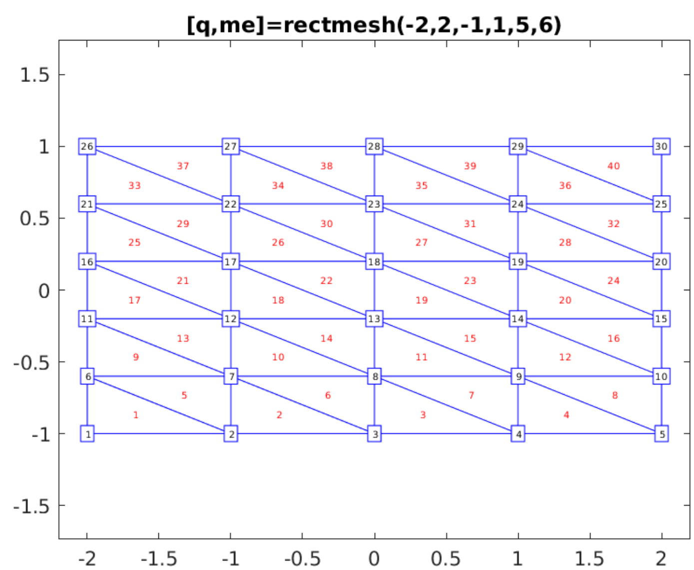


FIGURE 3 – Maillage triangulaire du rectangle $[a, b] \times [c, d]$.

Q. 4 (en autonomie) *Ecrire une fonction* [q,me]=unittrimesh(N) *retournant les tableaux de points et de connectivité associé au triangle (de référence) de sommet* $(0,0)$, $(1,0)$ *et* $(0,1)$ *avec* N *points sur chacune des arêtes comme décrit en Figure 4.*

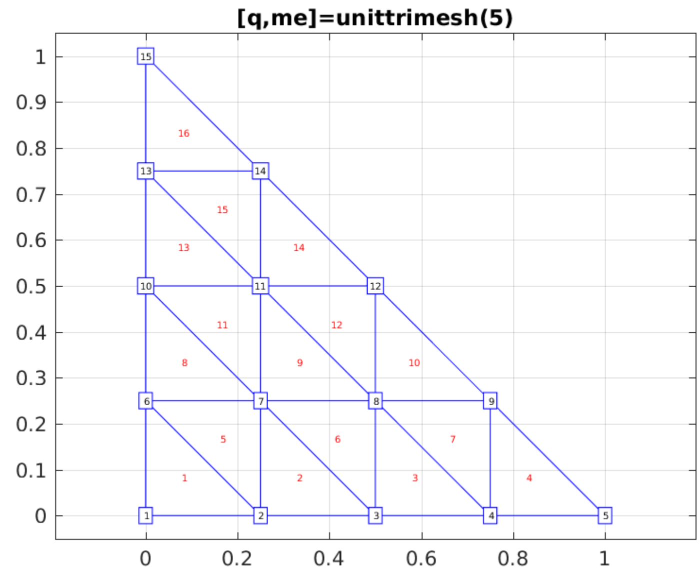


FIGURE 4 – Maillage triangulaire du triangle de référence.

Remarque 2 *Soit* $\hat{K}$ *le triangle de référence et* K *un triangle non dégénéré de sommets* $(\boldsymbol{q}^0, \boldsymbol{q}^1, \boldsymbol{q}^2)$. *La fonction* $\mathcal{F}_K$ *définie par*

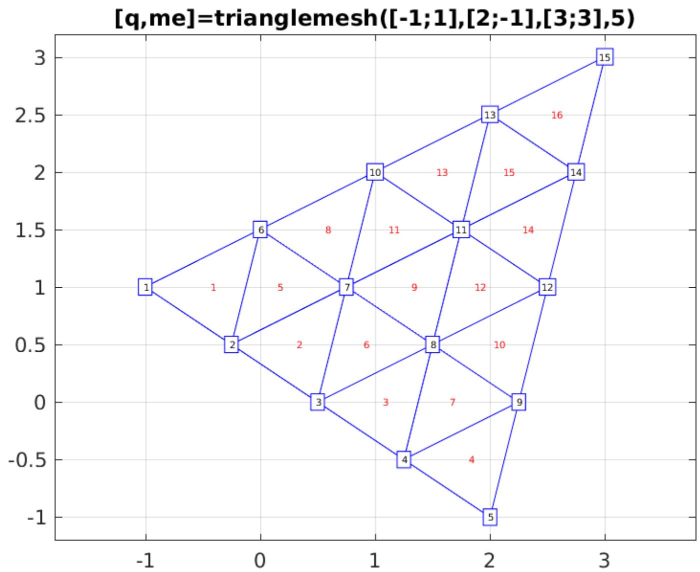
$$\begin{array}{rcccl} \mathcal{F}_K & : & \hat{K} \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & K \subset \mathbb{R}^2 \\ & & \hat{\boldsymbol{q}} = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} & \longmapsto & \boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}^0 + (\boldsymbol{q}^1 - \boldsymbol{q}^0)\hat{x} + (\boldsymbol{q}^2 - \boldsymbol{q}^0)\hat{y} \end{array} . \tag{0.3}$$

est une bijection.

Q. 5 (en autonomie) *Ecrire une fonction* [q,me]=trianglemesh(q0,q1,q2,N) *retournant les tableaux de points et de connectivité associé au triangle de sommets* q0, q1 *et* q2 *avec* N *points sur chacune des arêtes comme décrit en Figure 5.*

3 Génération de maillage avec la fonction delaunay

A partir d'un tableau de points, il est possible d'utiliser la fonction delaunay pour générer un tableau de connectivité.



■

FIGURE 5 – Maillage triangulaire du triangle de sommets $(-1,1)$ $(2,-1)$ et $(3,3)$.

Q. 6 *Ecrire une fonction [q,me]=trianglemeshdel(q0,q1,q2,N) retournant les tableaux de points et de connectivité associé au triangle de sommets q0, q1 et q2 avec N points sur chacune des arêtes. Le tableau de connectivité devra être généré avec la fonction delaunay .* ■

Q. 7 *Ecrire une fonction [q,me]=rectmeshdel(a,b,c,d,Nx,Ny) retournant les tableaux de points et de connectivité associé au rectangle* $[a, b] \times [c, d]$ *avec Nx points suivant* x *et Ny points suivant* y*. Le tableau de connectivité devra être généré avec la fonction delaunay .* ■

Q. 8 (en autonomie) *Ecrire une fonction [q,me]=diskmeshdel(center,radius,N) retournant les tableaux de points et de connectivité associé au disque de centre center et de rayon radius avec N points sur le cercle (bord) extérieur. Le tableau de connectivité devra être généré avec la fonction delaunay . Il faudra veiller, lors de la génération des points, à ce que les distances entre points voisins (ou longueurs des arêtes des triangles) soient suffisament «proches» pour ne pas obtenir au final des triagles trop «aplatis». Ils existent de nombreuses stratégies pour générer le tableau des points.A vous d'en choisir une et de l'implémenter. Deux stratégies sont représentées en Figure 6.* ■

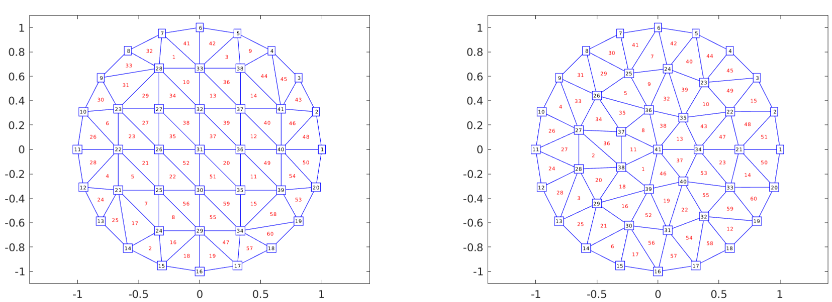


FIGURE 6 – Exemples de maillages du disque unité avec N=20 points sur le bord.

4 Calcul des aires

L'objectif ici est de calculer les aires de tous les triangles d'un maillage donné par ses tableaux de sommets et de connectivité.

Soit $\boldsymbol{q}^0$, $\boldsymbol{q}^1$ et $\boldsymbol{q}^2$ les trois sommets d'un triangle K non-dégénéré. On note $\mathbb{A}_K = (\boldsymbol{q}^1 - \boldsymbol{q}^0 \,|\, \boldsymbol{q}^2 - \boldsymbol{q}^0)$ la matrice 2×2.

La fonction $\mathcal{F}_K$ définie en (0.3) peut alors s'écrire

$$\mathcal{F}_K(\hat{\boldsymbol{q}}) = \mathbb{A}_K \hat{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{q}^0 \tag{0.4}$$

et on a

$$\int_K f(\boldsymbol{q})d\,\boldsymbol{q} = |\det(\mathbb{A}_K)| \int_{\hat{K}} f \circ \mathcal{F}_K(\hat{\boldsymbol{q}})d\hat{\boldsymbol{q}}. \tag{0.5}$$

Q. 9 *Ecrire une fonction* [areas]=meshareas(q,me) *retournant le tableau des aires associé au maillage.* areas(k) *sera l'aire du* k*-ème triangle du maillage.* ■