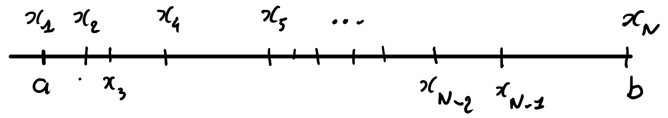
Eléments finis $\mathbb{P}_1$-Lagrange en dimension 1

- Présentation et résultats
- Calcul des intégrales $\int_a^b u(x)v(x)dx$, $\int_a^b u'(x)v'(x)\,dx$
- Résolution d'EDP

$$\begin{cases} -u'' + cu = f & \text{dans }]a,b[\\ + \text{ C.L.} & \text{Dirichlet, Neumann et/ou Robin} \end{cases}$$

Présentation et résultats

- maillage de $[a,b]$



$$x_1 = a < x_2 < x_3 < \dots < x_{N-1} < x_N = b \qquad (\overbrace{N}^{n_q} \text{ points/noeuds})$$

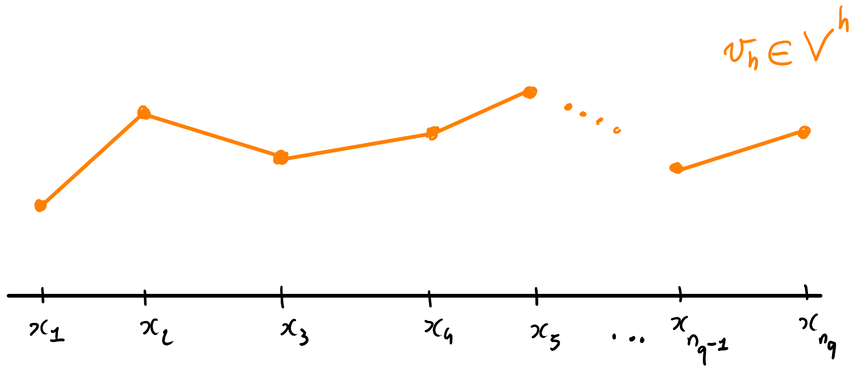
$$I_\ell = [x_\ell, x_{\ell+1}] \quad \forall \ell \in [\![1, N-1]\!]$$

$$h_\ell = |I_\ell| = x_\ell - x_{\ell-1} \quad \text{longueur de l'intervalle} \qquad (\overbrace{N-1}^{n_{me}} \text{ intervalles / éléments})$$

$$h = \max_{\ell \in [\![1, n_{me}]\!]} h_\ell$$

- Espace fonctionel des éléments finis $\mathbb{P}_1$-Lagrange

$$V^h = \{ v \in \mathcal{C}^0([a;b]) \text{ tq } \forall \ell \in [\![1, n_{me}]\!] \quad v_{|I_\ell} \in \underbrace{\mathbb{R}_1[x]}_{\text{espace des poly. de d° 1}} \}$$



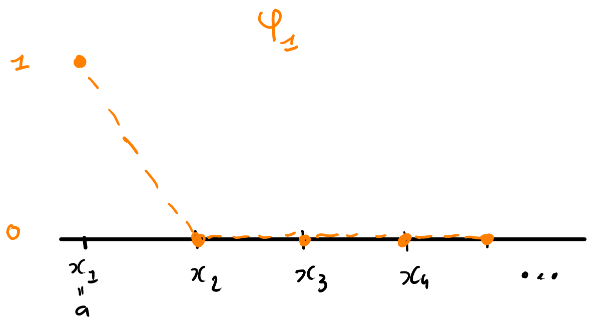
Q_1 $\boxed{\dim V^h = \;?}$

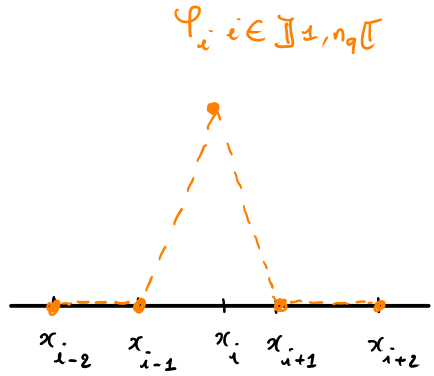
Il suffit de compter les degrès de liberté.

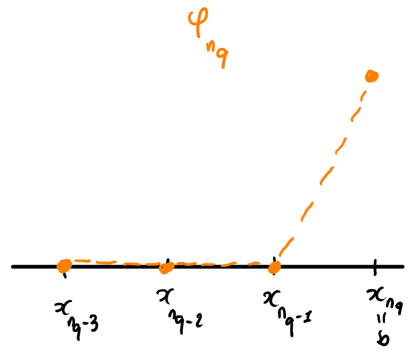
Q_2

Soit $i \in [\![1, n_q]\!]$, peut-on construire explicitement $\varphi_i \in V^h$ tq

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{i,j} \quad \forall j \in [\![1, n_q]\!]$$







$$\varphi_1(x) = \begin{cases} ? & \text{si } x \in [x_1, x_2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\varphi_{n_q}(x) = \begin{cases} ? & \text{si } x \in [x_{n_q-1}, x_{n_q}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\text{supp } \varphi_1 = ?$

$\text{supp } \varphi_{n_q} = ?$

$i \in]\!]1, n_q[\![$
$$\varphi_i(x) = \begin{cases} ? & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ ? & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\text{supp } \varphi_i = ?$

Q_3 $\boxed{\{\varphi_i\}_{i=1}^{n_q} \text{ est une base de } V^h}$

- Espace de Sobolev $H^1(a;b)$

$H^1(a;b) = \{ v \in L^2(a;b) \text{ tq } v' \in L^2(a,b) \}$

$\langle u, v \rangle_{H^1} = \int_a^b u(x) v(x)\,dx + \int_a^b u'(x) v'(x)\,dx$ est un produit scalaire sur $H^1(a,b)$

$\|u\|_{H^1} = \langle u, u \rangle_{H^1}^{1/2}$ est la norme induite.

$H^1(a,b)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{H^1}$ est un espace de Hilbert (espace vectoriel normé complet)

- Opérateur d'interpolation

$$\Pi_h : H^1(a;b) \longrightarrow V^h$$
$$u \longmapsto \Pi_h(u) = \sum_{i=1}^{n_q} u(x_i)\varphi_i$$

i.e $\Pi_h(u)(x) = \sum_{i=1}^{n_q} u(x_i)\varphi_i(x) \quad \forall x \in [a,b]$

Prop. (voir cours) Si $u \in H^2(a;b) \overset{\text{déf}}{=} \{ v \in H^1(a;b) \text{ tq } v'' \in L^2(a;b) \}$

$\|u - \Pi_h(u)\|_{L^2} \leqslant Ch^2 \|u''\|_{L^2}$

$\|u' - \Pi_h(u)'\|_{L^2} \leqslant Ch \|u''\|_{L^2}$

remarque

$\langle u, v \rangle_{H^2} = \langle u, v \rangle_{H^1} + \int_a^b u''(x) v''(x)\,dx$

produit scalaire de $H^2(a,b)$

on en déduit $\|u - \Pi_h(u)\|_{H^1} \leqslant Ch \|u''\|_{L^2}$

Q_4

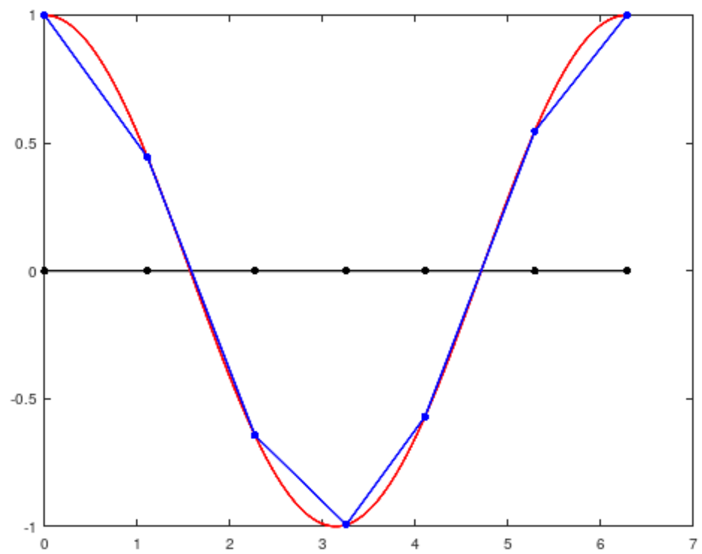
Ecrire une fonction Matlab/Octave permettant de générer les points $(x_i)_{i=1}^{n_q}$ non forcément uniformément distribués (ie ce n'est pas une discrétisation régulière)

Q_5

Soit $u \in H^1(a,b)$ et $(x_i)_{i=1}^{n_q}$ un maillage de $[a,b]$

Comment représenter u et $\Pi_h(u)$ avec Matlab/Octave

Par ex. $a=0$, $b=2\pi$ $n_q=7$ et $u(x)=\cos(x)$



- Calcul $\mathcal{B}(u,v)=\int_a^b u(x)v(x)dx$, $\forall (u,v)\in (H^1(a;b))^2$, par élément finis $\mathbb{P}_1$-Lagrange

On approche $\mathcal{B}(u,v)$ par $\mathcal{B}(\Pi_h(u),\Pi_h(v))$

Q_4

Montrer que si $(u,v)\in (H^2(a;b))^2$ alors

$$\left|\mathcal{B}(u,v)-\mathcal{B}(\Pi_h(u),\Pi_h(v))\right| = O(h^2)$$

- Calcul de $m(\Pi_h(u), \Pi_h(v)) = \int_a^b \Pi_h(u)(x)\, \Pi_h(v)(x)\, dx$

Pour simplifier les notations, on pose $u_h \stackrel{def}{=} \Pi_h(u)$ et $v_h \stackrel{def}{=} \Pi_h(v)$

On a donc
$$u_h = \Pi_h(u) = \sum_{j=1}^{n_q} u(x_j)\varphi_j$$
$$v_h = \Pi_h(v) = \sum_{i=1}^{n_q} v(x_i)\varphi_i$$

Soit $U \in \mathbb{R}^{n_q}$ et $V \in \mathbb{R}^{n_q}$ tq $U_i = u(x_i)$ et $V_i = v(x_i)$ $\forall i \in [\![1, n_q]\!]$

Prop

$$\boxed{m : \begin{array}{ccc} H^1(a;b) \times H^1(a,b) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & \int_a^b u(x)v(x)\,dx \end{array} \text{ est une application bilinéaire continue}}$$

On a
$$m(u_h, v_h) = m\left(\sum_{j=1}^{n_q} U_j\varphi_j, \sum_{i=1}^{n_q} V_i\varphi_i\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n_q}\left(\sum_{j=1}^{n_q} m(\varphi_j, \varphi_i)U_j\right)V_i \quad \text{par bilinéarité de } m$$

Soit $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_{n_q}(\mathbb{R})$ tq $\mathbb{M}_{i,j} = m(\varphi_j, \varphi_i)$ $\forall (i,j) \in [\![1, n_q]\!]^2$

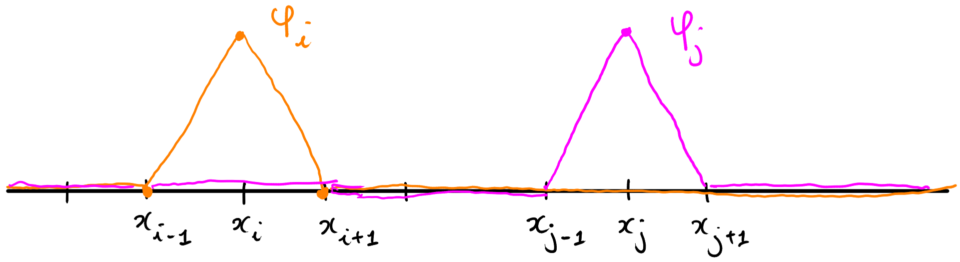
alors $(\mathbb{M}U)_i = \sum_{j=1}^{n_q} \mathbb{M}_{i,j}U_j$ et donc

$$\boxed{m(u_h, v_h) = \langle \mathbb{M}U, V \rangle}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ note le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^{n_q}$

Def

$\mathbb{M} \in \mathcal{M}_{n_q}(\mathbb{R})$, s'appelle la matrice de Masse et
$$\mathbb{M}_{i,j} = \int_a^b \varphi_j(x)\varphi_i(x)\,dx$$



Rem. $\boxed{\varphi_j\varphi_i = 0 \quad \text{si } |i-j| > 1}$ La matrice $\mathbb{M}$ est tridiagonale !

- Assemblage de la matrice de Masse

On a $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_{n_q}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{M}_{i,j} = \int_a^b \varphi_j(x)\varphi_i(x)\,dx$

$$= \sum_{k=1}^{n_{me}} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_j(x)\varphi_i(x) \qquad (n_{me} = n_q - 1)$$

Algo basique (utilisable en dim. supérieure)

V0

$\mathbb{M} \leftarrow 0$
pour $i \leftarrow 1$ à n_q
  pour $j \leftarrow 1$ à n_q
    pour $k \leftarrow 1$ à n_{me}
      $\mathbb{M}(i,j) = \mathbb{M}(i,j) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_j(x)\varphi_i(x)\,dx$
    Fin
  Fin
Fin

V1 on permutte les boucles pour que la boucle sur les intervalles (en k) soit la 1ère

$\mathbb{M} \leftarrow 0$
pour $k \leftarrow 1$ à n_{me}
  pour $i \leftarrow 1$ à n_q
    pour $j \leftarrow 1$ à n_q
      $\mathbb{M}(i,j) = \mathbb{M}(i,j) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_j(x)\varphi_i(x)\,dx$
    Fin
  Fin
Fin

Mais || sur l'intervalle I_k seules les fonctions φ_k et φ_{k+1} sont non nuls !

V2

$\mathbb{M} \leftarrow 0$
pour $k \leftarrow 1$ à n_{me}
  pour $i \leftarrow k$ à $k+1$
    pour $j \leftarrow k$ à $k+1$
      $\mathbb{M}(i,j) = \mathbb{M}(i,j) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_j(x)\varphi_i(x)\,dx$
    Fin
  Fin
Fin

sur chaque intervalle (élément) il y a 4 intégrales à calculer !!

Notons $\mathbb{M}^k \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
$k \in [\![1, n_{me}]\!]$

$$\mathbb{M}^k = \begin{pmatrix} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_k^2(x)\,dx & \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_{k+1}(x)\,\varphi_k(x)\,dx \\ \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_k(x)\,\varphi_{k+1}(x)\,dx & \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_{k+1}^2(x)\,dx \end{pmatrix}$$

$\boxed{\mathbb{M}^k \text{ est la matrice élémentaire de Masse associée à l'intervalle (élément) } k.}$

$\boxed{V3}$

```
M ← 0
pour k ← 1 à n_me
    M^k ← Calcul de la matrice élémentaire ...
    I ← k:k+1
    pour il ← 1:2
        i ← I(il)
        pour jl ← 1:2
            j ← I(jl)
            M(i,j) ← M(i,j) + M^k(il,jl)
        Fin
    Fin
Fin
```

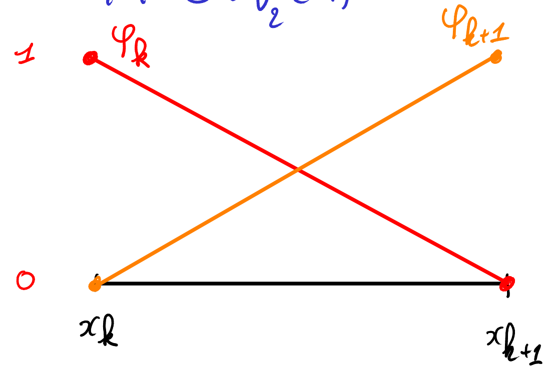
$\mathbb{M}(I,I) \leftarrow \mathbb{M}(I,I) + \mathbb{M}^k$

$\boxed{V3}$

```
M ← 0
pour k ← 1 à n_me
    M^k ← Calcul de la matrice élémentaire ...
    I ← k:k+1
    M(I,I) ← M(I,I) + M^k
Fin
```

• Calcul de la matrice élémentaire de Masse $\mathbb{M}^k \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$\mathbb{M}^k = \begin{pmatrix} \displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_k^2(x)\,dx & \displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_{k+1}(x)\,\varphi_k(x)\,dx \\ \displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_k(x)\,\varphi_{k+1}(x)\,dx & \displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_{k+1}^2(x)\,dx \end{pmatrix}$$



On a $\forall x \in [x_k, x_{k+1}]$

$$\varphi_k(x) = \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} = -\frac{x - x_{k+1}}{h_k}$$

$$\varphi_{k+1}(x) = \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} = \frac{x - x_k}{h_k}$$

x	x_k	$\frac{x_k + x_{k+1}}{2}$	x_{k+1}
$\varphi_k(x)$	1	1/2	0
$\varphi_{k+1}(x)$	0	1/2	0

* Calcul de $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_k^2(x)\,dx$, on peut le faire à la main ...

Mais sur $[x_k, x_{k+1}]$ φ_k^2 est un polynôme de d°2. On peut alors utiliser la formule de quadrature de Simpson qui a pour degré d'exactitude 3 :

$$\int_a^b f(x)\,dx \sim \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

On a donc de manière exacte

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_k^2(x)\,dx = \frac{h_k}{6}\left(\varphi_k^2(x_k) + 4\varphi_k^2\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) + 4\varphi^2(x_k)\right)$$

$$= \frac{h_k}{6}\left(1^2 + 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2\right) = \frac{h_k}{6}$$

De m̂

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_{k+1}^2(x)\,dx = \frac{h_k}{6}\left(0^2 + 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2\right) = \frac{h_k}{6}$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_k(x)\,\varphi_{k+1}(x)\,dx = \frac{h_k}{6}\left(1 \times 0 + 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 0 \times 1\right) = \frac{h_k}{3}$$

$$\mathbb{M}^k = \frac{h_k}{6}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Q_6

a) Ecrire la Fonction Matlab, Masse, permettant de calculer la matrice de Masse $\mathbb{M}$ pour un maillage donné $((x_i)_{i=1}^{nq})$

b) Ecrire un programme permettant de tester/valider rapidement cette Fonction

c) Ecrire un programme permettant de vérifier

$$\left| \int_a^b u(x)\, v(x)\, dx - \int_a^b \Pi_h(u)(x)\, \Pi_h(v)(x)\, dx \right| = O(h^2)$$

- Calcul de $b(u,v) = \int_a^b u'(x) v'(x) dx$

On approche $b(u,v)$ par $b(\Pi_h(u), \Pi_h(v))$. Avec les m̂ notations que pour la matrice de Masse, on abouti à :

$$b(\Pi h(u), \Pi h(v)) = \langle \mathbb{K} U, V \rangle$$

où $\mathbb{K} \in \mathcal{M}_{n_q}(\mathbb{R})$ est la matrice de rigidité

$$\mathbb{K}_{i,j} = \int_a^b \varphi_j'(x) \varphi_i'(x) dx \qquad \forall (i,j) \in [\![1, n_q]\!]$$

L'algorithe est "identique", seule la matrice élémentaire change.

def. La matrice élémentaire de rigité $\mathbb{K}^{k} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ associée à l'intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ est définie par

$$\mathbb{K}^{k} = \begin{pmatrix} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (\varphi_k'(x))^2 dx & \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_{k+1}'(x) \varphi_k'(x) dx \\ \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_k'(x) \varphi_{k+1}'(x) dx & \int_{x_k}^{x_{k+1}} (\varphi_{k+1}'(x))^2 dx \end{pmatrix}$$

Q7 Montrer que

$$\mathbb{K}^{k} = \frac{1}{h_k} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Q8 Reprendre la Q6 avec la matrice de rigidité en lieu et place de la matrice de Masse

Q9 Vectorisation complete des 2 fonctions d'assemblage