$\Omega = [a,b]$
$\nu > 0$

$$\begin{cases} -u'' + \nu u = f \quad \text{dans }]a,b[\quad (1) \\ + \text{C.L. en } a \text{ et } b \quad \text{par ex. } u'(a) = g_a \quad (\text{Neumann}) \\ \qquad\qquad u(b) = g_b \quad (\text{Dirichlet}) \end{cases}$$

$\boxed{\text{Pb modèle 1}}$

||| (1) + C.L. $u(a) = g_a$ et $u(b) = g_b$ Dirichlet

Si $u \in H^2(a;b)$ et $v \in H^1(a,b)$ alors

$$\int_a^b u''(x) v(x)\,dx = -\int_a^b u'(x) v'(x)\,dx + [u'(x) v(x)]_a^b$$

$H^m(a;b) = \{ v \in L^2(a;b) \text{ tq } \forall \alpha \in \mathbb{N}\ \alpha \leq m \text{ alors } \frac{d^\alpha v}{dx^\alpha} \in L^2(a,b) \}$

$\langle u, v \rangle_{H^m(a;b)} = \int_a^b uv\,dx\ \sum_{\alpha=1}^m \int_a^b u^{(\alpha)} v^{(\alpha)}\,dx$

$H^m(a,b)$ espace de Hilbert

Formulation variationnelle

On choisi un espace de fonctions tests nulles sur les bords Dirichlet

$H_0^1(a;b) = \{ v \in H^1(a;b) \text{ tq } v(a) = v(b) = 0 \}$ $\rightarrow$ espace de Hilbert muni de produit scalaire de $H^1(a;b)$

$$\int_a^b (1) \times v\,dx \Rightarrow -\int_a^b u''(x) v(x)\,dx + \nu \int_a^b u(x) v(x)\,dx = \int_a^b f(x) v(x)\,dx \qquad \forall v \in H_0^1(a;b)$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b u'(x) v'(x)\,dx - (u'(b)\underbrace{v(b)}_{=0} - u'(a)\underbrace{v(a)}_{=0}) + \nu \int_a^b u(x) v(x)\,dx = \int_a^b f(x) v(x)\,dx$$

car $v \in H_0^1(a;b)$

On note $H^1_{g_a,g_b}(a;b) = \{ u \in H^1(a;b) \text{ tq } u(a) = g_a \text{ et } u(b) = g_b \}$ ce n'est pas un espace vectoriel !!

(F.V.)
$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1_{g_a,g_b}(a;b) \text{ tq} \\ \mathcal{A}(u,v) = \mathcal{L}(v) \quad \forall v \in H_0^1(a;b) \\ \text{avec } \mathcal{A}(u,v) = \int_a^b u'(x) v'(x)\,dx + \nu \int_a^b u(x) v(x)\,dx \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(v) = \int_a^b f(x) v(x)\,dx \end{cases}$$

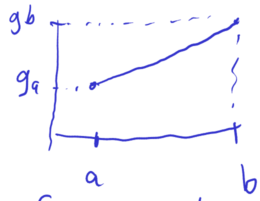
Théorème 26 (Théorème de Lax-Milgram) *On suppose*

1. *V un espace de Hilbert sur R de norme $\|.\|_V$.*
2. *$\mathcal{L}$ est une application linéaire de V à valeurs réelles.*
3. *$\mathcal{L}$ est une application continue sur V, c'est à dire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que*
$$\forall v \in V, \quad |\mathcal{L}(v)| \leqslant C \|v\|_V. \tag{1.4.40}$$
4. *$\mathcal{A}$ est une application bilinéaire de $V \times V$ à valeurs réelles.*
5. *$\mathcal{A}$ est une application continue sur $V \times V$, c'est à dire qu'il existe une constante $M > 0$ telle que*
$$\forall u, v \in V, \quad |\mathcal{A}(u,v)| \leqslant M \|u\|_V \|v\|_V. \tag{1.4.41}$$
6. *$\mathcal{A}$ est V-elliptique (coercive sur $V \times V$), c'est à dire qu'il existe une constante $\nu > 0$ telle que*
$$\forall v \in V, \quad \mathcal{A}(v,v)| \geqslant \nu \|v\|_V^2. \tag{1.4.42}$$

Alors, le problème variationnel
$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ \mathcal{A}(u,v) = \mathcal{L}(v), \ \forall v \in V \end{cases} \tag{1.4.43}$$
admet une unique solution.

$\Rightarrow$ on ne peut appliquer ce théorème à (F.V.) !

Relèvement $\quad \exists R \in H^1(a;b)$ tq $R(a) = g_a$ et $R(b) = g_b$ $\quad$ ex.



Fct affine !

On note $\omega = u - R$ alors $\omega \in H^1_0(a;b)$

et
$$\mathcal{A}(u,v) = \mathcal{A}(\omega + R, v) = \mathcal{A}(\omega, v) + \mathcal{A}(R,v)$$

(F.V.) peut donc se réécrire

$(F.V.)_R$
$$\begin{cases} \text{Trouver } \omega \in H^1_0(a;b) \text{ tq} \\ \mathcal{A}(\omega, v) = \mathcal{L}_R(v) \quad \forall v \in H^1_0(a;b) \qquad (3) \\ \text{avec } \mathcal{L}_R(v) = \mathcal{L}(v) - \int_a^b R(x)\,v(x)\,dx \end{cases}$$

Le Théorème de Lax-Milgram s'applique ici (en exercice)

et donc $\exists!\, \omega \in H^1_0(a;b)$ vérifiant (3)

Par construction $u = \omega + R$ vérifie (F.V.)

As-t'on unicité ? (le relèvement n'est pas unique)

$\hookrightarrow$ oui ! $\quad \begin{matrix} u_1 (= \omega_1 + R_1) \\ u_2 (= \omega_2 + R_2) \end{matrix}$ sol. de (F.V.)

$$\Rightarrow \mathcal{A}(u_1 - u_2, v) = 0 \quad \forall v \in H^1_0(\Omega)$$

mais $u_1 - u_2 \in \ldots$

Formulation variationnelle continue

$$(F.V.)\quad \left[\begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H^1_{g_a,g_b}(a;b) \text{ tq} \\ \mathcal{A}(u,v) = \mathcal{L}(v) \quad \forall v \in H^1_0(a;b) . \\ \text{avec } \mathcal{A}(u,v) = \int_a^b u'(x)\, v'(x)\, dx + 2\int_a^b u(x)\, v(x)\, dx \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(v) = \int_a^b f(x)\, v(x)\, dx \end{array}\right.$$

Formulation variationnelle discrète

$$(F.V.)_h\quad \left[\begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in H^1_{g_a,g_b}(a;b) \cap V^h \overset{def}{=} V^h_{g_a,g_b} \\ \mathcal{A}(u_h,v_h) = \mathcal{L}(v_h) \quad \forall v_h \in H^1_0(a;b) \cap V^h \overset{def}{=} V^h_0 \end{array}\right. \qquad (4)$$

$V_h = \text{Vect}\{\varphi_1, \dots, \varphi_{n_q}\}$

$V_0^h = \text{Vect}\{\varphi_2, \dots, \varphi_{n_q-1}\}$ $\quad \dim V_0^h = n_q - 2$

V_h et V_0^h muni du produit scalaire de $H^1(a;b)$ sont des espaces de Hilbert

inconnues

$$u_h \in V^h_{g_a,g_b} \Leftrightarrow u_h(x) = g_a \varphi_1(x) + \sum_{i=2}^{n_q-1} u_i \varphi_i(x) + g_b \varphi_{n_q}(x)$$

$$v_h \in V_0^h \Leftrightarrow v_h(x) = \sum_{i=2}^{n_q-1} v_i \varphi_i(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$

- Existence et unicité de $(F.V.)_h$?

Il existe un relèvement $R_h \in V^h$ tq $R_h(a) = g_a$ et $R_h(b) = g_b$

par exemple $R_h(x) = g_a \varphi_1(x) + g_b \varphi_{n_q}(x) \quad \forall x \in [a,b]$

On pose $w_h = u_h - R_h \in V_0^h$ et donc $u_h = w_h + R_h$

$$(F.V.)_h \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } w_h \in V_0^h \\ \mathcal{A}(w_h,v_h) = \mathcal{L}'(v_h) = \mathcal{L}(v_h) - \mathcal{A}(R_h,v_h) \quad \forall v_h \in V_0^h \end{array}\right. \qquad (5)$$

Le théorème de Lax-Milgram s'applique (en exercice)

$\Rightarrow \exists!\, w_h \in V_0^h$ vérifiant (5)

L'unicité de u_h se démontre comme dans le cas continu

$$\begin{cases} \text{Trouver } w_h \in V_0^h \text{ tq} \\ \mathcal{B}(w_h, v_h) = \mathcal{L}'(v_h) \quad \forall v_h \in V_0^h \end{cases} \quad (5)$$

$\mathcal{B}(u,v) = \int_a^b u'(x) v'(x) dx + \nu \int_a^b u(x) v(x) dx$

$\mathcal{L}'(v_h) = \mathcal{L}(v_h) - \mathcal{B}(R_h, v_h)$

$\mathcal{L}(v) = \int_a^b f(x) v(x) dx$

$U_h = w_h + R_h$ sol. de $(F.V.)_h$

avec $R_h = g_a \varphi_1 + g_b \varphi_{n_q}$

$$\underbrace{(5) \Leftrightarrow}_{\text{à démontrer}} \quad \mathcal{B}(w_h, \varphi_i) = \mathcal{L}'(\varphi_i) \quad \forall i \in]\!]1, n_q[\![\quad (6)$$

On a $w_h \in V_0^h \Leftrightarrow w_h(x) = \sum_{j=2}^{n_q-1} w_j \varphi_j(x) \quad \forall x \in [a,b]$

$$(6) \Leftrightarrow \sum_{j=2}^{n_q-1} \mathcal{B}(\varphi_j, \varphi_i) w_j = \mathcal{L}'(\varphi_i) \quad \forall i \in [\![2, n_q-1]\!]$$

$$\mathcal{L}'(\varphi_i) = \int_a^b f(x) \varphi_i(x) dx - \mathcal{B}(R_h, \varphi_i)$$

or $\mathcal{B}(R_h, \varphi_i) = \mathcal{B}(g_a \varphi_1 + g_b \varphi_{n_q}, \varphi_i)$

$= g_a \mathcal{B}(\varphi_1, \varphi_i) + g_b \mathcal{B}(\varphi_{n_q}, \varphi_i) \quad i \in [\![2, n_q-1]\!]$

$$\mathcal{B}(R_h, \varphi_i) = \int_a^b f(x) \varphi_i(x) dx + \begin{cases} g_a \mathcal{B}(\varphi_1, \varphi_2) & \text{si } i = 2 \\ g_b \mathcal{B}(\varphi_{n_q}, \varphi_{n_q-1}) & \text{si } i = n_q - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On note $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n_q}(\mathbb{R})$ $\quad \mathbb{A} = \mathbb{K} + \nu \mathbb{M}$ $\quad$ ($\mathbb{K}$ matrice de rigidité et $\mathbb{M}$ matrice de masse)

$$\mathbb{A}_{i,j} = \int_a^b \varphi_j'(x) \varphi_i'(x) dx + \nu \int_a^b \varphi_j(x) \varphi_i(x) dx$$
$$= \mathcal{B}(\varphi_j, \varphi_i)$$

Calcul de $\int_a^b f(x) \varphi_i(x) dx$

Q_{10}

$$\boxed{\int_a^b f(x) \varphi_i(x) \sim (\mathbb{M} F)_i \quad \text{ou} \quad F \in \mathbb{R}^{n_q} \quad F_i = f(x_i)}$$

De la formulation variationnelle à la résolution d'un système linéaire

a

Formulation variationnelle discrète

$$(F.V.)_h \quad \left[\begin{array}{l} \text{Trouver } \quad u_h \in H^1_{g_a,g_b}(a;b) \cap V^h \overset{def}{=} V^h_{g_a,g_b} \\ \mathcal{B}(u_h,v_h) = \mathcal{L}(v_h) \quad \forall v_h \in H^1_0(a;b) \cap V^h \overset{def}{=} V^h_0 \end{array}\right. \qquad (4)$$

$V_h = \mathrm{Vect}\{\varphi_1, \dots, \varphi_{n_q}\}$

$V_0^h = \mathrm{Vect}\{\varphi_2, \dots, \varphi_{n_q-1}\}$ $\quad \dim V_0^h = n_q - 2$

V_h et V_0^h muni du produit scalaire de $H^1(a;b)$ sont des espaces de Hilbert

inconnues

$$u_h \in V^h_{g_a,g_b} \iff u_h(x) = g_a \varphi_1(x) + \sum_{i=2}^{n_q-1} U_i \varphi_i(x) + g_b \varphi_{n_q}(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$

$$v_h \in V_0^h \iff v_h(x) = \sum_{i=2}^{n_q-1} v_i \varphi_i(x)$$

$(F.V.)_h \iff$ (à savoir démontrer)

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } \quad u_h \in V^h_{g_a,g_b} \quad \text{tq} \\ \mathcal{B}(u_h,\varphi_i) = \mathcal{L}(\varphi_i) \quad \forall i \in [\![2, n_q-1]\!] \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } \quad u_h \in V^h \quad \text{tq} \\ u_h(a) = g_a \\ u_h(b) = g_b \\ \mathcal{B}(u_h,\varphi_i) = \mathcal{L}(\varphi_i) \quad \forall i \in [\![2, n_q-1]\!] \end{array}\right.$$

$$\iff \quad (10) \left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } \quad U \in \mathbb{R}^{n_q} \quad \left(U_h = \sum_{j=1}^{n_q} U_j \varphi_j\right) \quad \text{tq} \\ U_1 = g_a \\ \sum_{j=1}^{n_q} \mathcal{B}(\varphi_j,\varphi_i) U_j = \mathcal{L}(\varphi_i) \quad \forall i \in [\![2, n_q-1]\!] \\ U_{n_q} = g_b \end{array}\right.$$

Il y a n_q inconnues, les $(U_i)_{i=1}^{n_q}$ et n_q équations linéaires en les inconnues

$$\Rightarrow \quad (10) \iff \boxed{\tilde{\mathbb{A}} U = \tilde{C}} \qquad (11)$$

avec $\tilde{\mathbb{A}} \in \mathcal{M}_{n_q}(\mathbb{R})$ et $\tilde{C} \in \mathbb{R}^{n_q}$

On note $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n_q}(\mathbb{R})$ $\quad \mathbb{A} = \mathbb{K} + \nu \mathbb{M}$ (𝕂 matrice de rigidité et 𝕄 matrice de Masse)

$$\mathbb{A}_{i,j} = \int_a^b \varphi_j'(x)\varphi_i'(x)\,dx + \nu \int_a^b \varphi_j(x)\varphi_i(x)\,dx$$
$$= \mathcal{B}(\varphi_j, \varphi_i)$$

Pour calculer $\mathcal{L}(\varphi_i) = \int_a^b f(x)\varphi_i(x)\,dx$, on approche f par $\Pi_h(f)$

et on a $\left| \int_a^b f(x)\varphi_i(x)\,dx - \underbrace{\int_a^b \Pi_h(f)(x)\varphi_i(x)\,dx}_{\overset{=}{def}\ \mathcal{L}_h(\varphi_i)} \right| = O(h^2)$ (à démontrer)

On a alors

$$\mathcal{L}_h(\varphi_i) = \sum_{j=1}^{n_q} \left(\int_a^b \varphi_j(x)\varphi_i(x)\,dx \right) f(x_j)$$
$$= \sum_{j=1}^{n_q} \underbrace{\mathbb{M}_{i,j}}_{} F_j \qquad \text{avec} \qquad F = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_{n_q}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_q}$$

𝕄 = Matrice de Masse

On note $c = \mathbb{M}F \in \mathbb{R}^{n_q}$ alors $c_i = \mathcal{L}_h(\varphi_i)$ $\forall i \in [\![1, n_q]\!]$

Le système linéaire (11) $\tilde{\mathbb{A}} U = \tilde{c}$ s'écrit alors

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbb{A}_{2,1} & \mathbb{A}_{2,2} & \cdots & \mathbb{A}_{2,n_q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbb{A}_{n_q-1,1} & \mathbb{A}_{n_q-1,2} & \cdots & \mathbb{A}_{n_q-1,n_q} \\ 0 & 0 & \cdots \ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{n_q-1} \\ U_{n_q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_a \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n_q-1} \\ g_b \end{pmatrix} \qquad (11)$$

Prop. Soit $u_h = \sum_{i=1}^{n_q} U_i \varphi_i \in V_h$, $U = (U_i)_{i=1}^{n_q}$ solution de (11) et soit $u \in H^1(a;b)$ sol. de (F.V.) alors, si $u \in H^2(a,b)$
$$\|u - u_h\|_{L^2} = O(h^2) \quad \text{et} \quad \|u - u_h\|_{H^1} = O(h)$$

Pour tester/valider les codes que nous allons écrire, il nous faut construire des problèmes avec solutions exactes.

$$(\mathcal{S}_{DD})\quad \begin{cases} -u''(x) + \nu u(x) = f(x) & \forall x \in]a,b[\\ u(a) = g_a \\ u(b) = g_b \end{cases}$$

Données : $a<b$, $\nu > 0$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g_a \in \mathbb{R}$ et $g_b \in \mathbb{R}$

Inconnue : $u : [a,b] \to \mathbb{R}$

Pour celà, on choisi la solution u suffisament régulière, par exemple $u(x) = \cos(x)$ et on l'injecte dans l'EDP

Avec par exemple $a = -\pi/3$, $b = \pi/4$, $\nu = 1$ on obtient

$$-u''(x) + \nu u(x) = \cos(x) + \nu\cos(x) = 2\cos(x) = f(x)$$

Il faut donc prendre $f(x) = (1+\nu)\cos(x) = 2\cos(x)$

$$g_a = u(a) = \cos(a)$$
$$g_b = u(b) = \cos(b)$$

Q_{11} a) Ecrire la fonction solveEDP01 retournant le maillage et la solution du système linéaire (11)

b) Ecrire un programme permettant de résoudre $(\mathcal{S}_{DD})$ par éléments finis $\mathbb{P}_1$-Lagrange. On représentera la solution exacte et la solution numérique

c) Ecrire un programme permettant de vérifier les ordres de la méthode numérique

rappel : soit u sol. de (F.V.) et u_h sol. de $(F.V.)_h$, si $u \in H^2(a,b)$ alors
$\|u - u_h\|_{L^2} = O(h^2)$ et $\|u - u_h\|_{H^1} = O(h)$

Remarques sur le système linéaire (11)

rappel

Le système linéaire (11) $\tilde{\mathbb{A}}\, U = \tilde{C}$ s'écrit alors

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \mathbb{A}_{2,1} & \mathbb{A}_{2,2} & \cdots & \cdots & \mathbb{A}_{2,n_q} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \mathbb{A}_{n_q-1,1} & \mathbb{A}_{n_q-1,2} & \cdots & \cdots & \mathbb{A}_{n_q-1,n_q} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{n_q-1} \\ U_{n_q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_a \\ C_2 \\ \vdots \\ C_{n_q-1} \\ g_b \end{pmatrix} \quad (11)$$

$\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n_q}(\mathbb{R})$ avec $\mathbb{A} = \mathbb{K} + \nu \mathbb{M}$ ie

$$\mathbb{A}_{ij} = \int_a^b \varphi_j'(x)\varphi_i'(x)\,dx + \nu \int_a^b \varphi_j(x)\varphi_i(x)\,dx = \mathcal{A}(\varphi_j, \varphi_i)$$

On a $\mathcal{A} : H^1(a,b) \times H^1(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, $(u,v) \longmapsto \mathcal{A}(u,v)$ est coercive, i.e. $\exists C > 0$ tq $\forall v \in H^1(a;b),\ \mathcal{A}(v,v) \geq C\|v\|^2_{H^1(a;b)}$

et $\mathcal{A}_h : V^h \times V^h \longrightarrow \mathbb{R}$, $(u_h, v_h) \longmapsto \mathcal{A}(u_h, v_h)$ est coercive, $\forall v_h \in V^h,\ \mathcal{A}_h(u_h, v_h) \geq C\|v_h\|^2$

V^h muni du produit scalaire de $H^1(a,b)$ est un espace de Hilbert

Q12 Montrer que $\mathbb{A}$ est une matrice symétrique définie positive.

(à faire)

Remarque la matrice $\tilde{\mathbb{A}}$ de (11) n'est pas symétrique. On a "perdu" le caractère (SDP) symétrique définie positive ce qui nous interdit alors l'usage de nombreuses méthodes de résolution de systèmes linéaires efficaces pour les matrices SDP (Cholesky, S.O.R, Gradient Conjugué, ...)

Mais on peut y remédier ! On "isole" les composantes Dirichlet / on élimine les equations Dirichlet

$$(11) \Leftrightarrow \tilde{\mathbb{A}} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{n_q-1} \\ 0 \end{pmatrix}}_{W} + \underbrace{\begin{pmatrix} U_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ U_{n_q} \end{pmatrix}}_{R} \right) = \underbrace{\begin{pmatrix} g_a \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n_q-2} \\ g_b \end{pmatrix}}_{C} \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\mathbb{A}}\, W = C - \tilde{A}\, R$$

$$\Leftrightarrow \tilde{\mathbb{A}}\, W = c - \tilde{\mathbb{A}}\, R \quad \text{avec} \quad R = \begin{pmatrix} g_a \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g_b \end{pmatrix}$$

On pose $n = n_q - 2$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} 1 & \overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{n} & 1 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ \\ n \\ \\ 1 \end{array} &
\left(\begin{array}{c|ccc|c}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline
A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,n_q-1} & A_{2,n_q} \\
\vdots & \vdots & & & \vdots \\
A_{n_q-1,1} & A_{n_q-1,2} & \cdots & A_{n_q-1,n_q-1} & A_{n_q-1,n_q} \\ \hline
0 & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{array}\right)
\end{array}
=
\left(\begin{array}{c|ccc|c}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline
 & & & & \\
 & & \tilde{\tilde{A}} & & \\
 & & & & \\ \hline
0 & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{array}\right)
$$

I = 2:nq-1; Att = A(I,I); % Calcul de Att = $\tilde{\tilde{A}}$

On a

$$
\tilde{A} W = \tilde{A} \begin{pmatrix} 0 \\ \hdashline u_2 \\ \vdots \\ u_{n_q-1} \\ \hdashline 0 \end{pmatrix} = \tilde{A} \begin{pmatrix} 0 \\ \hdashline \tilde{\tilde{W}} \\ \hdashline 0 \end{pmatrix}
\qquad \text{avec } \tilde{\tilde{W}} = \begin{pmatrix} u_2 \\ \vdots \\ u_{n_q-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n
$$

$$
= \begin{pmatrix} 0 \\ \hdashline \tilde{\tilde{A}} \tilde{\tilde{W}} \\ \hdashline 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\tilde{A} W = c - \tilde{A} R
$$

$$
c - \tilde{A} R = \underbrace{\begin{pmatrix} g_a \\ \hdashline b_2 \\ \vdots \\ b_{n_q-1} \\ \hdashline g_b \end{pmatrix}}_{c}
-
\left(\begin{array}{c|ccc|c}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline
A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,n_q-1} & A_{2,n_q} \\
\vdots & \vdots & & & \vdots \\
A_{n_q-1,1} & A_{n_q-1,2} & \cdots & A_{n_q-1,n_q-1} & A_{n_q-1,n_q} \\ \hline
0 & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{array}\right)
\begin{pmatrix} g_a \\ \hdashline 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hdashline g_b \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 0 \\ \hdashline b_2 \\ \vdots \\ b_{n_q-1} \\ \hdashline 0 \end{pmatrix}
-
\left(\begin{array}{c|ccc|c}
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline
A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,n_q-1} & A_{2,n_q} \\
\vdots & \vdots & & & \vdots \\
A_{n_q-1,1} & A_{n_q-1,2} & \cdots & A_{n_q-1,n_q-1} & A_{n_q-1,n_q} \\ \hline
0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{array}\right)
\begin{pmatrix} g_a \\ \hdashline 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hdashline g_b \end{pmatrix}
$$

On a alors

$$\tilde{\mathbb{A}} W = C - \tilde{A} R \iff$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ \tilde{\tilde{\mathbb{A}}}\,\tilde{\tilde{W}} \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n_q-1} \\ 0 \end{pmatrix} - \left(\begin{array}{c|ccc|c} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline \mathbb{A}_{2,1} & \mathbb{A}_{2,2} & \cdots & \mathbb{A}_{2,n_q-1} & \mathbb{A}_{2,n_q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathbb{A}_{n_q-1,1} & \mathbb{A}_{n_q-1,2} & \cdots & \mathbb{A}_{n_q-1,n_q-1} & \mathbb{A}_{n_q-1,n_q} \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} g_a \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g_b \end{pmatrix}$$

$$\iff \underset{n\times n}{\tilde{\tilde{\mathbb{A}}}}\ \underset{n}{\tilde{\tilde{W}}} = \underset{n}{\begin{pmatrix} b_2 \\ \vdots \\ b_{n_q-1} \end{pmatrix}} - \underset{n\times n_q}{\left(\begin{array}{c|ccc|c} \mathbb{A}_{2,1} & \mathbb{A}_{2,2} & \cdots & \mathbb{A}_{2,n_q-1} & \mathbb{A}_{2,n_q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathbb{A}_{n_q-1,1} & \mathbb{A}_{n_q-1,2} & \cdots & \mathbb{A}_{n_q-1,n_q-1} & \mathbb{A}_{n_q-1,n_q} \end{array}\right)} \underset{n_q}{\begin{pmatrix} g_a \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g_b \end{pmatrix}} \qquad (12)$$

```
I = 2 : n_q-1 ;
wtt = A(I,I) \ ( b(I) - A(I,:)*R ) ;
U = [ ga ; wtt ; gb ] ;
```

Remarque La matrice $\tilde{\tilde{\mathbb{A}}}$ est symétrique définie positive !

$= A(I,I)$

Q13 $\boxed{\text{Reprendre la Q11 en utilisant (12) pour la résolution}}$