MACS 2 **EDP**
Sup'Galilée **Année 2022-2023**

Travaux pratiques - Méthodes des différences finies [1]

Différences finies pour les EDPs 1D stationnaires (TP3)

Table des matières

1 Approximation de dérivées premières **1**

2 Approximation de dérivées secondes **3**

3 E.D.P. modèle Dirichlet/Dirichlet **3**

4 E.D.P. modèle Neumann/Dirichlet **5**
4.1 Neumann ordre 1 5
4.2 Neumann ordre 2 6

5 E.D.P. modèle Dirichlet/Robin **6**
5.1 Robin ordre 1 6
5.2 Robin ordre 2 6

6 E.D.P. avec conditions aux limites génériques **7**

7 Debut de généralisation et valeurs propres **7**

1 Approximation de dérivées premières

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a, b]$ et suffisament régulière.

Q. 1 *Montrer que l'on a*

$$f'(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x})}{h} + \mathcal{O}(h) \tag{1.1}$$

$$f'(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x}) - f(\bar{x}-h)}{h} + \mathcal{O}(h) \tag{1.2}$$

■

Q. 2 *On note $x_i = a + ih$, $i \in [\![0, n]\!]$, une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$. Soit une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ suffisament régulière. On suppose que les y_i sont donnés par*

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{1.3}$$

Ecrire une fonction Derive1 *permettant de calculer des approximations d'ordre 1 de $f'(x_i)$ pour $i \in [\![0, n]\!]$.* ■

1. version du 5 octobre 2022 à 10:00

Pour obtenir une formule d'approximation d'ordre 2 de $f'(\bar{x})$, on suppose $f \in \mathcal{C}^3(]a,b[)$ et on peut alors développer les formules de Taylor de $f(\bar{x}+h)$ et $f(\bar{x}-h)$ jusqu'au troisième ordre.

On obtient alors

$$f'(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2). \tag{1.4}$$

- Cette approximation est la formule des **différences finies centrées**.
- Cette approximation est d'ordre 2.

Q. 3 *Montrer que l'on a les deux formules suivantes*

$$f'(\bar{x}) = -\frac{f(\bar{x}+2h) - 4f(\bar{x}+h) + 3f(\bar{x})}{2h} + \mathcal{O}(h^2), \tag{1.5}$$

$$f'(\bar{x}) = \frac{3f(\bar{x}) - 4f(\bar{x}-h) + f(\bar{x}-2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2). \tag{1.6}$$

■

Q. 4 *On note $x_i = a + ih$, $i \in [\![0,n]\!]$, une discrétisation régulière de l'intervalle $[a,b]$. Soit une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ suffisament régulière. On suppose que les y_i sont donnés par*

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in [\![0,n]\!]. \tag{1.7}$$

Ecrire une fonction Derive2 *permettant de calculer des approximations d'ordre 2 de $f'(x_i)$ pour $i \in [\![0,n]\!]$.* ■

Q. 5 *Ecrire un programme, nommé* erreurDerive *, permettant de vérifier graphiquement, pour chacune des 2 fonctions précédentes , l'ordre des erreurs. voir figure 1.* ■

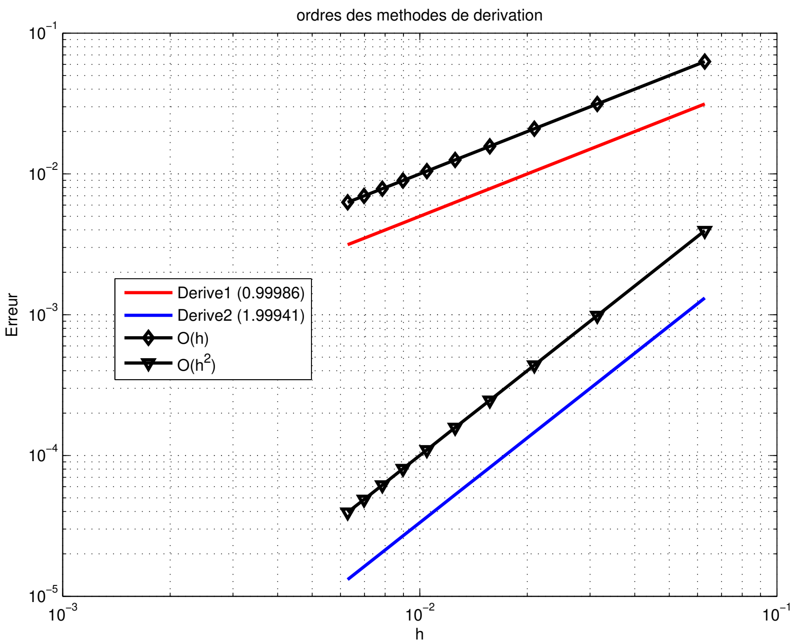

FIGURE 1 – Ordre de l'erreur des méthodes de dérivation

2 Approximation de dérivées secondes

L'objectif ici est déterminer une approximation d'ordre 2 de la dérivée seconde d'une fonction f (suffisament régulière) en les points d'une discrétisation régulière $x_i = a + ih$, $i \in [\![0, n]\!]$, de l'intervalle $[a, b]$.

Q. 6 *1. Montrer que l'on a la formule suivante utilisant deux points de part et d'autres de* $\bar{x}$ *:*

$$f^{(2)}(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x}+h) - 2f(\bar{x}) + f(\bar{x}-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \tag{2.1}$$

2. On va établir une formule n'utilisant que des points après $\bar{x}$*. Pour celà montrer que*

$$h^2 f^{(2)}(\bar{x}) = f(\bar{x}) - 2f(\bar{x}+h) + f(\bar{x}+2h) - h^3 f^{(3)}(\bar{x}) + \mathcal{O}(h^4), \tag{2.2}$$

$$3h^2 f^{(2)}(\bar{x}) = 2f(\bar{x}) - 3f(\bar{x}+h) + f(\bar{x}+3h) - 4h^3 f^{(3)}(\bar{x}) + \mathcal{O}(h^4). \tag{2.3}$$

Puis en déduire

$$f^{(2)}(\bar{x}) = \frac{2f(\bar{x}) - 5f(\bar{x}+h) + 4f(\bar{x}+2h) - f(\bar{x}+3h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2). \tag{2.4}$$

3. Etablir la formule suivante n'utilisant que des points avant $\bar{x}$ *:*

$$f^{(2)}(\bar{x}) = \frac{2f(\bar{x}) - 5f(\bar{x}-h) + 4f(\bar{x}-2h) - f(\bar{x}-3h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2). \tag{2.5}$$

■

Q. 7 *Ecrire une fonction* DeriveSec2 *permettant de calculer des approximations d'ordre 2 de* $f^{(2)}(x_i)$ *pour* $i \in [\![0, n]\!]$. ■

Q. 8 *Ecrire un programme, nommé* erreurDeriveSeconde *, permettant de vérifier/retrouver graphiquement, l'ordre de la méthode d'approximation précédente. voir figure 2.* ■

3 E.D.P. modèle Dirichlet/Dirichlet

On souhaite résoudre par un schéma de type différences finies le problème suivant

$$-u''(x) = f(x), \ \forall x \in]a; b[\tag{3.1}$$

$$u(a) = u_a \in \mathbb{R} \tag{3.2}$$

$$u(b) = u_b \in \mathbb{R} \tag{3.3}$$

On peut prendre comme jeux de données $a = -\frac{1}{3}\pi$, $b = 2$, $f(x) = 9\cos(3x+1) + 4\sin(2x)$, $u_a = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \cos(-\pi+1)$ et $u_b = \cos(7) + \sin(4)$. Dans ce cas la solution exacte est $u(x) = \cos(3x+1) + \sin(2x)$.

On définit la matrice associée au laplacien (en 1D opérateur dérivée seconde) discrétisé à l'ordre 2 par $\mathbb{K} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ avec

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

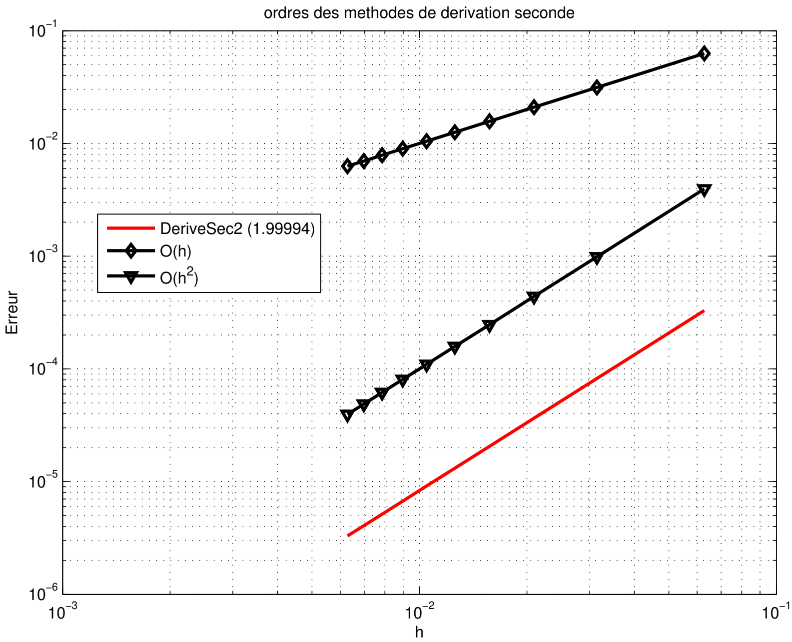

FIGURE 2 – Ordre de l'erreur de l'approximation de la dérivée seconde

Q. 9 1. *Ecrire une fonction* Lap1D *(fichier* Lap1D.m*) permettant de générer cette matrice.*

2. *Proposer plusieurs méthodes pour tester/valider cette fonction et les implémenter dans une fonction* validLap1D *ayant (au moins) comme argument la dimension de la matrice.* ■

Q. 10 *Ecrire un programme* Edp0 *(fichier* Edp0.m*) permettant de de résoudre numériquement le problème (3.1)-(3.2)-(3.3) par un schéma différences finies d'ordre* 2*. Ce programme representera graphiquement la solution numérique obtenue, la solution exacte et l'erreur.* ■

Q. 11 *Ecrire le programme* OrdreEdp0 *(fichier* OrdreEDP0.m*) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas h de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode. Un exemple de représentation est donné en Figure 3.* ■

Q. 12 1. *Ecrire le programme* Edp1 *(fichier* Edp1.m*) permettant de calculer une solution approchée de :*

$$\begin{aligned} -u''(x) + \nu u(x) &= f(x), \ \forall x \in]a; b[&& (3.4)\\ u(a) &= u_a \in \mathbb{R} && (3.5)\\ u(b) &= u_b \in \mathbb{R} && (3.6) \end{aligned}$$

avec $\nu \geqslant 0$. Avec un choix judicieux de données, ce programme representera graphiquement la solution numérique obtenue, la solution exacte et l'erreur.

2. *Ecrire le programme* OrdreEdp1 *(fichier* OrdreEDP1.m*) permettant de représenter, en échelle logarithmique, l'erreur en fonction du pas h de discrétisation et d'afficher l'ordre de la méthode. Le jeu de données sera choisi judicieusement.* ■

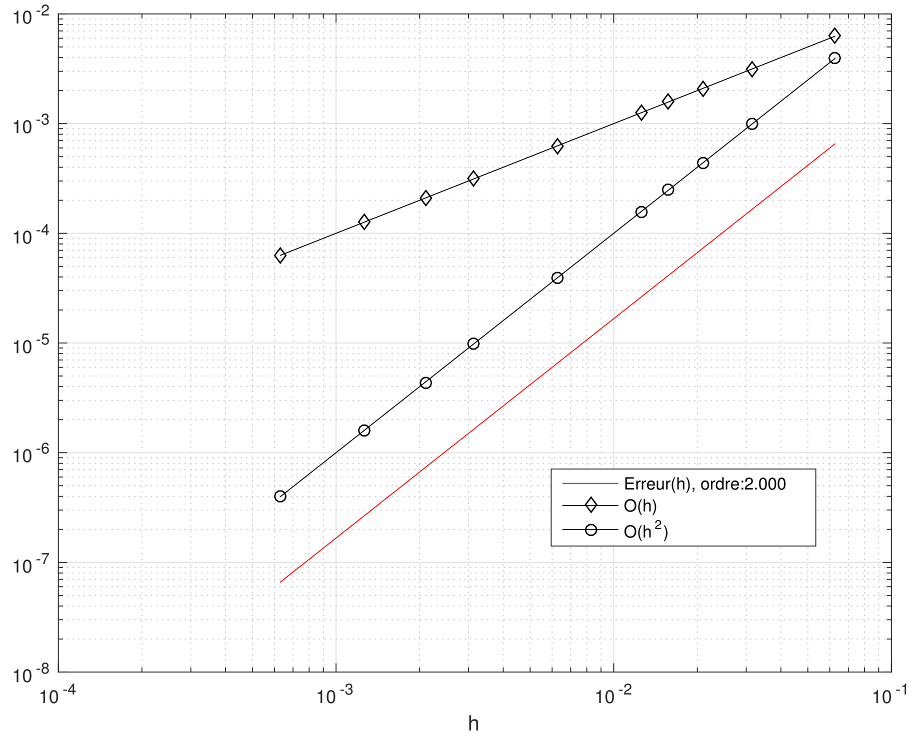

FIGURE 3 – Représentation de l'erreur en fonction de h

4 E.D.P. modèle Neumann/Dirichlet

On cherche à résoudre par un schéma de type différences finies le problème suivant

$$-u''(x) = f(x), \ \forall x \in]a;b[\tag{4.1}$$
$$u'(a) = v_a \in \mathbb{R} \tag{4.2}$$
$$u(b) = u_b \in \mathbb{R} \tag{4.3}$$

On peut prendre comme jeux de données $a = -\frac{1}{4}\pi$, $b = \frac{1}{3}\pi$, $f(x) = \sin(x) - 2$, $v_a = -\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{2}$ et $u_b = \frac{1}{9}\pi^2 + \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Dans ce cas la solution exacte est $u(x) = x^2 + \sin(x)$.

4.1 Neumann ordre 1

Dans la condition aux limites de Neumann (4.2), on va approcher $u'(a)$ à l'ordre 1 par $\frac{u(a+h)-u(a)}{h}$

Q. 13 *Ecrire le programme* Edp2 *(fichier* Edp2.m*) permettant de représenter une solution approchée du problème précédent. Avec un choix judicieux de données, ce programme representera graphiquement la solution numérique obtenue, la solution exacte et l'erreur.* ■

Q. 14 *Ecrire le programme* OrdreEdp2 *(fichier* OrdreEDP2.m*) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas h de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode.* ■

4.2 Neumann ordre 2

Dans la condition aux limites de Neumann (4.2), on va approcher $u'(a)$ à l'ordre 2 par $\frac{-u(a+2h)+4u(a+h)-3u(a)}{2h}$

Q. 15 *Ecrire le programme* Edp3 *(fichier* Edp3.m*) permettant de représenter une solution approchée du problème précédent. Avec un choix judicieux de données, ce programme representera graphiquement la solution numérique obtenue, la solution exacte et l'erreur.* ■

Q. 16 *Ecrire le programme* OrdreEdp3 *(fichier* OrdreEDP3.m*) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas h de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode.* ■

5 E.D.P. modèle Dirichlet/Robin

On cherche à résoudre par un schéma de type différences finies le problème suivant

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x), \ \forall x \in]a;b[&& (5.1)\\ u(a) &= g_a \in \mathbb{R} && (5.2)\\ u(b)+\mu u'(b) &= g_b \in \mathbb{R} && (5.3) \end{aligned}$$

On choisira un jeu de données de manière à avoir une solution exacte non triviale.

5.1 Robin ordre 1

Dans la condition aux limites de Robin (5.2), on va approcher $u'(b)$ à l'ordre 1 par $\frac{u(b)-u(b-h)}{h}$

Q. 17 *Ecrire le programme* Edp4 *(fichier* Edp4.m*) permettant de représenter une solution approchée du problème précédent. Avec un choix judicieux de données, ce programme representera graphiquement la solution numérique obtenue, la solution exacte et l'erreur.* ■

Q. 18 *Ecrire le programme* OrdreEdp4 *(fichier* OrdreEDP4.m*) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas h de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode.* ■

5.2 Robin ordre 2

Q. 19
1. *Dans la condition aux limites de Robin (5.2), déterminer comment approcher $u'(b)$ à l'ordre 2.*
2. *Ecrire le programme* Edp5 *(fichier* Edp5.m*) permettant de représenter une solution approchée du problème précédent. Avec un choix judicieux de données, ce programme representera graphiquement la solution numérique obtenue, la solution exacte et l'erreur.*

■

Q. 20 *Ecrire le programme* OrdreEdp5 *(fichier* OrdreEDP5.m*) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas h de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode.* ■

6 E.D.P. avec conditions aux limites génériques

On cherche à résoudre par un schéma de type différences finies le problème suivant

$$-u''(x) = f(x), \ \forall x \in]a;b[\tag{6.1}$$
$$\delta_a u(a) + \mu_a u'(a) = v_a \in \mathbb{R} \tag{6.2}$$
$$\delta_b u(b) + \mu_b u'(b) = v_b \in \mathbb{R} \tag{6.3}$$

où δ_a et δ_b sont donnés dans $\{0,1\}$ et μ_a et μ_b sont deux réels donnés.

Q. 21
1. *Donner un jeu de valeurs δ_a, δ_b, μ_a, μ_b, pour lesquelles il n'y a pas trivialement unicité de la solution de* (6.1),(6.2),(6.3).
2. *Ecrire une discrétisation à l'ordre* 2 *de chacune des condition aux limites.*
3. *Pour chacune des conditions écrire une fonction permettant de la prendre en compte dans le système linéaire.*
4. *Ecrire le programme* Edp6 *(fichier* Edp6.m*) permettant de représenter une solution approchée du problème précédent. Que se passe-t'il lorsqu'il n'y a pas unicité de la solution (théorique) ?*
5. *Ecrire le programme* OrdreEdp6 *(fichier* OrdreEDP6.m*) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas h de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode.* ■

7 Debut de généralisation et valeurs propres

On cherche à résoudre par un schéma de type différences finies le problème suivant

$$-u''(x) + \nu u(x) = f(x), \ \forall x \in]a;b[\tag{7.1}$$
$$\delta_a u(a) + \mu_a u'(a) = v_a \in \mathbb{R} \tag{7.2}$$
$$\delta_b u(b) + \mu_b u'(b) = v_b \in \mathbb{R} \tag{7.3}$$

où ν est une constante. Les autres paramètres sont décrits dans la section précédente.
L'objectif ici est double : commencer une généralisation de l'EDP à résoudre et étudier le comportement de la solution numérique en fonction de ν. Il faut aussi noter que l'existence et l'unicité d'une solution à ce problème ne sont pas forcément assurées dans le cas général ! Toutefois, il est possible de les obtenir sous les hypothèses (non optimales)

$$\nu > 0, \quad \mu_a \leqslant 0 \quad \mu_b \geqslant 0$$

avec f suffisament régulière.

Q. 22
1. *Ecrire le programme* Edp7 *(fichier* Edp7.m*) permettant de représenter une solution approchée du problème précédent.*
2. *Ecrire le programme* OrdreEdp7 *(fichier* OrdreEDP7.m*) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas h de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode.* ■

Pour regarder le comportement de la solution en fonction de ν on va tout d'abord résoudre par un schéma de type différences finies le problème aux valeurs propres : Trouver (λ, v) solution de

$$\begin{aligned} -v''(x) &= \lambda v(x),\ \forall x \in]a;b[\qquad (7.4)\\ \delta_a v(a) + \mu_a v'(a) &= 0 \qquad (7.5)\\ \delta_b v(b) + \mu_b v'(b) &= 0 \qquad (7.6) \end{aligned}$$

On rappelle que pour le problème aux valeurs propres de Dirichlet ($\delta_a = \delta_b = 1$ et $\mu_a = \mu_b = 0$) avec $a = 0$ et $b = L$ les valeurs propres et vecteurs propres associés sont donnés par

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2, \quad v_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{L}\right).$$

Q. 23 *On se place dans le cas $\delta_a = \delta_b = 1$, $\mu_a = \mu_b = 0$, $a = 0$ et $b = L$.*

1. *Proposer un schéma aux différences finies pour résoudre ce problème. Celui-ci pourra alors s'écrire sous la forme*
$$\mathbb{A}\boldsymbol{v} = \lambda\mathbb{B}\boldsymbol{v}$$
où $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ sont des matrices et $\boldsymbol{v}$ un vecteur.
2. *A l'aide de la fonction* eigs *de Matlab (ou* **eig** *pour les matrices pleines), calculer les 10 valeurs propres les plus proches de 0 et representer les vecteurs propres associés. ($[V, D] \leftarrow$ eigs$(\mathbb{A}, \mathbb{B}, 10, 0)$)*
3. *As t'on unicité de la solution de (7.1)-(7.2)-(7.3) si ν est l'opposé d'une des valeurs propres précédentes.*
4. *Vérifier ces résultats on choisissant judicieusement les paramètres du programme* Edp7 *.*

■

Q. 24 *On se place maintenant dans le cas général.*

1. *Proposer un schéma aux différences finies pour résoudre le problème aux valeurs propres (7.4)-(7.5)-(7.6). Celui pourra alors s'écrire sous la forme*
$$\mathbb{A}\boldsymbol{v} = \lambda\mathbb{B}\boldsymbol{v}$$
où $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ sont des matrices et $\boldsymbol{v}$ un vecteur.
2. *A l'aide de la fonction* eigs *de Matlab (ou* **eig** *pour les matrices pleines), calculer les 10 valeurs propres les plus proches de 0 et representer les vecteurs propres associés. ($[V, D] \leftarrow$ eigs$(\mathbb{A}, \mathbb{B}, 10, 0)$). Vérifier la pertinence des résultats trouver.*
3. *As t'on unicité de la solution de (7.1)-(7.2)-(7.3) si ν est l'opposé d'une des valeurs propres précédentes ?*
4. *Vérifier ces résultats on choisissant judicieusement les paramètres du programme* Edp7 *.*

■