Travaux pratiques - Rattrapage du 11 avril 2022 (3h00)

Sans documents, sans calculatrice, sans portable, ...
Le barême est donné à titre indicatif

Exercice 1 (7 points)

On souhaite résoudre numériquement l'E.D.P. suivante

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) &= f(t,x),\ \forall (t,x) \in]t_0; t_0+T] \times]a;b[, & (1)\\
u(t_0, x) &= u_0(x),\ \forall x \in [a;b], & (2)\\
u(t,a) &= u_a(t),\ \forall t \in [t_0; t_0+T], & (3)\\
u(t,b) &= u_b(t),\ \forall t \in [t_0; t_0+T]. & (4)
\end{aligned}$$

avec ν un réel strictement positif, $t_0 \in \mathbb{R}$, $T > 0$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$.

On note t^n, $n \in [\![0, N_t]\!]$ et x_i, $i \in [\![0, N_x]\!]$ les discrétisations régulières des intervalles $[t_0; t_0+T]$ et $[a;b]$ avec N_t pas de discrétisation en temps et N_x pas de discrétisation en espace.

On propose le schéma numérique suivant :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \nu \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = f_i^{n+1}. \quad (5)$$

Q. 1 ***a.*** *Ecrire* ***de manière détaillée****, la façon dont le schéma (5) a été obtenu à partir de (1).*

b. *Expliquer* ***en détails*** *comment utiliser ce schéma pour résoudre numériquement le problème (1) à (4).* ☐

Q. 2 (Matlab) *Ecrire un programme Matlab permettant de :*

- *résoudre le problème précédent avec des données judicieusement choisies (pour avoir une solution exacte),*
- *représenter graphiquement la solution exacte et la solution approchée au cours du temps.* ☐

Exercice 2 (2 points)

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ la matrice tridiagonale définit par

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix}
v_1 & w_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\
u_1 & v_2 & w_2 & \ddots & & \vdots\\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\
\vdots & & \ddots & \ddots & v_{d-1} & w_{d-1}\\
0 & \cdots & \cdots & 0 & u_{d-1} & v_d
\end{pmatrix} \quad (1)$$

avec $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{d-1}$, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^d$ et $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^{d-1}$.

On rappelle une des manières d'utiliser la fonction **sparse** de Matlab/Octave :

`M = sparse(I,J,K,m,n);`

Cette commande génère une matrice creuse `m` par `n` telle que `M(I(k),J(k)) = K(k)`. Les vecteurs `I`, `J` et `K` ont la même longueur. Il faut noter que tous les éléments nuls de `K` sont ignorés et que tous les éléments de `K` ayant les mêmes indices dans `I` et `J` sont sommés.
La commande `M = sparse(m,n);` permet, quant à elle, de créer une matrice creuse nulle de dimension `m` par `n`.

Q. 1 (Matlab) *Ecrire la fonction* `spMTD` *permettant à partir des vecteurs* $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ *et* $\boldsymbol{w}$ *de retourner la matrice creuse* $\mathbb{A}$ *définie en (1). Pour celà on va tout d'abord créer une matrice creuse de* $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ *puis on va la «remplir», composante par composante, à l'aide d'une ou plusieurs boucle* **for**.

Q. 2 (Matlab) *Ecrire la fonction* spMTDvec *permettant à partir des vecteurs* $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ *et* $\boldsymbol{w}$ *de retourner la matrice creuse* $\mathbb{A}$ *en créant (sans boucle) les tableaux* I, J *et* K *puis en générant la matrice* $\mathbb{A}$ *à l'aide de la commande* A = **sparse**(I,J,K,d,d);

EXERCICE 3 (11 POINTS)

Soient $\Omega =]a,b[\times]c,d[\subset \mathbb{R}^2$ et $\Gamma = \partial\Omega$ la frontière du domaine Ω. On note $(x_i)_{i=0}^{N_x}$ et $(y_j)_{j=0}^{N_y}$ les discrétisation régulières, respectivement, des intervalles $[a,b]$ et $[c,d]$ défines par

$$x_i = a + ih_x,\ \forall i \in [\![0, N_x]\!] \quad \text{et} \quad y_j = c + jh_y,\ \forall j \in [\![0, N_y]\!] \tag{1}$$

avec $h_x = (b-a)/N_x$ et $h_y = (d-c)/N_y$. On note aussi

$$n_x = N_x + 1,\quad n_y = N_y + 1 \quad \text{et} \quad N = n_x \times n_y \tag{2}$$

Soient $f : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\kappa \in \mathbb{R}^+$ donnés. On veut résoudre le problème suivant

$$-\Delta u + \kappa u = f,\quad \text{dans } \Omega, \tag{3}$$
$$u = g,\quad \text{sur } \Gamma, \tag{4}$$

en utilisant le schéma différence finie d'ordre 2 suivant :

$$-\frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h_x^2} - \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{h_y^2} + \kappa U_{i,j} = f(x_i, y_j), \qquad \forall (i,j) \in]\!]0, N_x[\![\times]\!]0, N_y[\![, \tag{5}$$
$$U_{0,j} = g(a, y_j), \qquad \forall j \in]\!]0, N_y[\![, \tag{6}$$
$$U_{N_x,j} = g(b, y_j), \qquad \forall j \in]\!]0, N_y[\![, \tag{7}$$
$$U_{i,0} = g(x_i, c), \qquad \forall i \in [\![0, N_x]\!], \tag{8}$$
$$U_{i,N_y} = g(x_i, d), \qquad \forall i \in [\![0, N_x]\!], \tag{9}$$

avec $U_{i,j} \approx u(x_i, y_j)$.
Pour tout $i \in [\![0, N_x]\!]$, on note $\boldsymbol{U}_{i,:}$ le vecteur de $\mathbb{R}^{n_y}$ définit par

$$\boldsymbol{U}_{i,:} = \begin{pmatrix} U_{i,0} \\ \vdots \\ U_{i,N_y} \end{pmatrix}.$$

On note $\boldsymbol{V} = (V_1, \dots V_N)^t \in \mathbb{R}^N$ le vecteur bloc

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}_{0,:} \\ \hdashline \boldsymbol{U}_{1,:} \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \boldsymbol{U}_{N_x,:} \end{pmatrix}$$

Dans le cas de la numérotation en $(i,j) \in [\![0, N_x]\!] \times [\![0, N_y]\!]$ on parlera de **numérotation 2D** et pour la numérotation en $k \in [\![1, N]\!]$ on parlera de **numérotation globale**.

Attention, ici, la numérotation globale est différente de celle utilisée en TP

Dans cet exercice, lorsqu'un code Matlab est demandé sous forme **vectorisée**, celà sous-entend qu'il faut «*supprimer*» au maximum les boucles (dans la mesure du possible).

Q. 1 *Explicitez la bijection* $\mathcal{G} : [\![0, N_x]\!] \times [\![0, N_y]\!] \longrightarrow [\![1, N]\!]$ *telle que*

$$\forall (i,j) \in [\![0, N_x]\!] \times [\![0, N_y]\!],\quad V_k = U_{i,j},\quad \text{avec } k = \mathcal{G}(i,j).$$

Q. 2 (Matlab) ***a.*** *Ecrire la fonction* k=bijG(i,j ,...) *correspondant à la bijection* $\mathcal{G}$ *(* ***numerotation 2D*** *vers* ***numerotation globale****). Ici* ,... *peut correspondre à des paramètres supplémentaires nécessaires.*

b. *Ecrire la fonction réciproque* [i ,j]=bijRecG(k,...) *correspondant à* $\mathcal{G}^{-1}$ *(* ***numerotation globale*** *vers* ***numerotation 2D****). On pourra utiliser la fonction* **rem**(x,y) *qui retourne le reste de la division entière de* x *par* y*. Ici* ,... *peut correspondre à des paramètres supplémentaires nécessaires.*

Q. 3 (Matlab) *Soient* $\boldsymbol{X}$ *et* $\boldsymbol{Y}$ *dans* $\mathbb{R}^N$ *les vecteurs (bloc) en numéroration globale tels que*

$$\forall k \in [\![1, N]\!],\ (i,j) = \mathcal{G}^{-1}(k),\ \boldsymbol{X}_k = x_i \quad et \quad \boldsymbol{Y}_k = y_j.$$

Ecrire une fonction ***vectorisée*** $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}] = \text{Grille}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ *où* $\boldsymbol{x} = (x_0, \dots, x_{N_x})$ *et* $\boldsymbol{y} = (y_0, \dots, y_{N_y})$ *correspondent, respectivement, aux discrétisations en* x *et en* y*. On pourra, pour celà, utiliser les fonctions écrites dans* **Q. 2**.

Q. 4 (Matlab) *Soit* h *une fonction définie sur* $\bar{\Omega}$ *à valeurs réelles et Soit* $\boldsymbol{H} \in \mathbb{R}^N$ *le vecteur (bloc) en numéroration globale correspondant au stockage de tous les* $h(x_i, y_j)$, $\forall (i,j) \in [\![0, N_x]\!] \times [\![0, N_y]\!]$.

a. *Ecrire une fonction* ***vectorisée*** EvalFun2D *permettant à partir d'une fonction* h *donnée, définie de* $\bar{\Omega}$ *et à valeurs réelles, et des discrétisations* $\boldsymbol{x}$ *et* $\boldsymbol{y}$ *de retourner le vecteur* $\boldsymbol{H}$ *associé.*

b. *Ecrire un programme complet* ***vectorisé*** *permettant de représenter la fonction* $h : (x,y) \mapsto cos(x^2 + y^2)$ *sur* $[-2, 2] \times [-3, 3]$*. On utilisera la fonction graphique Matlab/Octave* $\mathbf{surf}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \mathbb{Z})$ *avec* $\mathbb{Z} \in \mathcal{M}_{n_y, n_x}(\mathbb{R})$ *et* $\mathbb{Z}_{j,i} = h(x_{i-1}, y_{j-1})$, $\forall (i,j) \in [\![1, n_x]\!] \times [\![1, n_y]\!]$*. On pourra utiliser les fonctions déjà écrites.*

Chacune des équations du problème discret (5) à (9) correspond à une discrétisation en un point (x_i, y_j). Nous choisissons d'écrire ces équations en utilisant la même numérotation que lors de la construction du vecteur $\boldsymbol{V}$: l'équation *écrite* au point (x_i, y_j) sera écrite en ligne $k = \mathcal{G}(i,j)$ du système.

Q. 5 *Expliquer en détails que le problème discret* (5) *à* (9) *peut s'écrire sous la forme du système linéaire bloc (N équations)*

$$\left(\begin{array}{c|cccccc|c}
\mathbb{E} & \mathbb{O} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\
\hline
\mathbb{M} & \mathbb{D} & \mathbb{M} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\
\mathbb{O} & \mathbb{M} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \mathbb{O} & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbb{O} & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbb{M} & \mathbb{O} \\
\mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{M} & \mathbb{D} & \mathbb{M} \\
\hline
\mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{E}
\end{array}\right) \boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{0,:} \\ \hdashline \boldsymbol{B}_{1,:} \\ \hdashline \vdots \\ \vdots \\ \hdashline \boldsymbol{B}_{N_x,:} \end{pmatrix} \tag{10}$$

où chaque bloc de la matrice est une matrice de $\mathcal{M}_{n_y}(\mathbb{R})$*. La matrice* $\mathbb{O} \in \mathcal{M}_{n_y}(\mathbb{R})$ *est la matrice nulle. Les matrices creuses* $\mathbb{D}$, $\mathbb{M}$ *et* $\mathbb{E}$ *ainsi que les vecteurs* $\boldsymbol{B}_{i,:} \in \mathbb{R}^{n_y}$*, pour tout* $i \in [\![0, N_x]\!]$*, devront être donnés explicitement.*

Q. 6 (Matlab) *Ecrire la fonction* $\mathbb{A} = \text{Assemble2D}(N, N_x, \mathbb{D}, \mathbb{E}, \mathbb{M})$ *retournant la matrice creuse (bloc) du système linéaire* (10) *où les matrices creuses* $\mathbb{D}$, $\mathbb{E}$, *et* $\mathbb{M}$ *sont supposées connues et passées en paramètre.*