Ecole d'ingénieurs Sup Galilée
Energétique - Informatique - Instrumentation
Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique
Télécommunications et Réseaux

Ingénieurs MACS 2 - TP F.E.M. (S8)

Eléments finis $\mathbb{P}_1$-Lagrange en dimension $\geqslant 1$: épisode 1

Espace fonctionnel des éléments finis $\mathbb{P}_1$-Lagrange

François Cuvelier

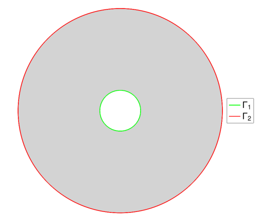
Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications
Institut Galilée
Université Paris XIII.

Prérequis

- Notion de maillages,
- Eléments finis $\mathbb{P}_1$-Lagrange en dimension 1,
  $\longrightarrow$ voir vidéos dédiées

Objectif : approcher $u \in \mathcal{C}^0(\Omega_1; \mathbb{R})$ ou $u \in \mathcal{C}^0(\Gamma_1; \mathbb{R})$ ou $u \in \mathcal{C}^0(\Gamma_2; \mathbb{R})$ par exemples

- Espaces des éléments finis $\mathbb{P}_1$-Lagrange sur un maillage,
- Fonctions de base associées.



Plan

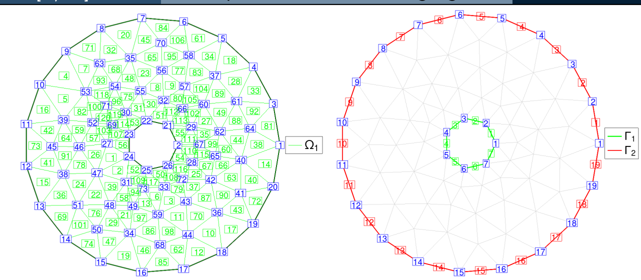


Figure: Ω^h : maillage d'un anneau $\Omega = \Omega_1$, Γ_1 bord intérieur, Γ_2 bord extérieur.

Composé de trois maillages **élémentaires**, deux sont décrits :

- $\Omega_1^h (= \Omega^h)$: q1, `size` $= (2, n_q)$; me1, `size` $= (3, \mathrm{n_{me}})$; toG1, `size` $= (1, n_q)$ avec $n_q = 73$, $\mathrm{n_{me}} = 120$,
  $$\Omega_1^h = \bigcup_{k=1}^{\mathrm{n_{me}}} T_k, \text{ et } T_k, \text{ triangle de sommets } \mathrm{q1}\,(:, \mathrm{me1}(:,k)).$$
- Γ_1^h : q_b1, `size` $= (2, n_q)$; me_b1, `size` $= (2, \mathrm{n_{me}})$; toG_b1, `size` $= (1, n_q)$ avec $n_q = 7$, $\mathrm{n_{me}} = 7$,
  $$\Gamma_1^h = \bigcup_{k=1}^{\mathrm{n_{me}}} S_k, \text{ et } S_k, \text{ segment de sommets } \mathrm{q\_b1}(:, \mathrm{me\_b1}(:,k)).$$

Dans ce maillage particulier, on a: q_b1 == q1(:,toG_b1) ☞ voir ep01.ring00

Plan

- E_h un maillage **élémentaire** composé de d-simplexes en dimension n:
  qh, `size` $= (n, n_{\mathrm{q}})$; meh, `size` $= (d+1, \mathrm{n_{me}})$; toGh, `size` $= (1, n_{\mathrm{q}})$
  $$E_h = \bigcup_{k=1}^{\mathrm{n_{me}}} K_k \subset \mathbb{R}^n, \text{ et } K_k,\ d\text{-simplexe de sommets } \mathrm{qh}(:, \mathrm{meh}(:,k)).$$
- $V(E_h)$ espace fonctionnel $\mathbb{P}_1$-Lagrange associé au maillage élémentaire E_h:
  $$\boxed{V(E_h) = \left\{ v \in \mathcal{C}^0(E_h; \mathbb{K}) \text{ tq } \forall k \in [\![1, \mathrm{n_{me}}]\!],\ v_{|K_k} \in \mathbb{K}_1[X_1, \ldots, X_n] \right\}}$$
  Traduction: $V(E_h)$, *espace des fonctions continus sur* E_h *à valeurs dans* $\mathbb{K}$ *(*$\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*) telles que leurs restrictions à* K_k *soit un polynôme de degré* 1, *pour tout* k.
  ✎ $\dim(\mathbb{K}_1[X_1, \ldots, X_n])$?

Notations : $\mathrm{qh} = E_h.\mathrm{q}$, $\mathrm{meh} = E_h.\mathrm{me},$, $\mathrm{toGh} = E_h.\mathrm{toGlobal}$, $n_{\mathrm{q}} = E_h.n_{\mathrm{q}}$, $\mathrm{n_{me}} = E_h.\mathrm{n_{me}}$, $\ldots$

Sur le maillage de l'anneau:
$$\mathcal{C}^0(\Omega; \mathbb{K}) \approx V(\Omega_1^h),\quad \mathcal{C}^0(\Gamma_1; \mathbb{K}) \approx V(\Gamma_1^h) \text{ et } \mathcal{C}^0(\Gamma_2; \mathbb{K}) \approx V(\Gamma_2^h).$$
$$\Omega_1^h.n_{\mathrm{q}} \neq \Gamma_1^h.n_{\mathrm{q}} \neq \Gamma_2^h.n_{\mathrm{q}}, \ldots$$

Chaque maillage élémentaire E_h possède son propre jeu de données:

- $E_h.\mathrm{q}$, `size` $= (n, n_{\mathrm{q}})$; $E_h.\mathrm{me}$, `size` $= (d+1, \mathrm{n_{me}})$; $E_h.\mathrm{toGlobal}$, `size` $= (1, n_{\mathrm{q}})$
  $\rightarrow$ avec $n_{\mathrm{q}} = E_h.n_{\mathrm{q}}$, $\mathrm{n_{me}} = E_h.\mathrm{n_{me}}$, $n = E_h.n$, $\ldots$
  $$V(E_h) = \left\{ v \in \mathcal{C}^0(E_h; \mathbb{K}) \text{ tq } \forall k \in [\![1, \mathrm{n_{me}}]\!],\ v_{|K_k} \in \mathbb{K}_1[X_1, \ldots, X_n] \right\}$$

Propriétés: espace $V(E_h)$

- espace vectoriel, $\dim(V(E_h)) = n_{\mathrm{q}}$,
- Soit $i \in [\![1, n_{\mathrm{q}}]\!]$, $\exists! \varphi_i \in V(E_h)$ tel que
  $$\varphi_i(\mathrm{q}^j) = \delta_{i,j},\ \forall j \in [\![1, n_{\mathrm{q}}]\!], \quad \text{où } \mathrm{q}^j \stackrel{\mathsf{def}}{=} E_h.\mathrm{q}^j$$
- $\{\varphi_i\}_{i=1}^{n_{\mathrm{q}}}$ base de $V(E_h)$,
- les φ_i sont appelées fonctions de base $\mathbb{P}_1$-Lagrange associées à E_h, notées aussi $E_h.\varphi_i$.
- $\varphi_i \equiv 0$ sur K_k, si $q^i \notin K_k \Rightarrow \mathrm{supp}(\varphi_i) = \displaystyle\bigcup_{\{k \in [\![1, \mathrm{n_{me}}]\!];\ q^i \in K_k\}} K_k$.

$$u_h \in V(E_h) \iff u_h = \sum_{i=1}^{n_{\mathrm{q}}} \mu_i \varphi_i \iff u_h(\mathrm{q}) = \sum_{i=1}^{n_{\mathrm{q}}} \mu_i \varphi_i(\mathrm{q}),\ \forall \mathrm{q} \in E_h$$

Plan

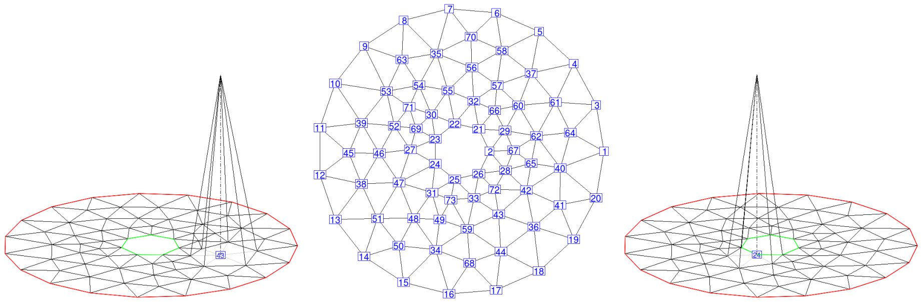


Figure: Numérotation des noeuds de Ω^h (centre), fonctions de base $\Omega^h.\varphi_{43}$ (gauche) et $\Omega^h.\varphi_{24}$ (droite) appartenant à $V(\Omega^h)$.

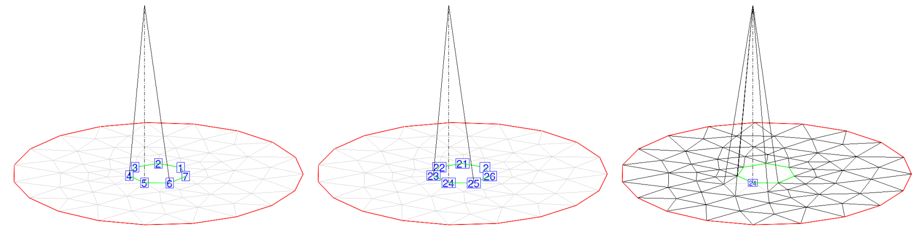


Figure: Fonction de base $\Gamma_1^h.\varphi_5$, numérotation locale (gauche) et globale (centre). Fonction de base $\Omega^h.\varphi_{24}$ (droite).

Avec $\gamma_{\Gamma_1^h} : V(\Omega^h) \longrightarrow V(\Gamma_1^h)$, fonction trace/restriction:

$$\gamma_{\Gamma_1^h}(\Omega^h.\varphi_{24}) = \Gamma_1^h.\varphi_5$$

E_h maillage élémentaire de Ω^h. La restriction/trace sur E_h d'une fonction de base $\mathbb{P}_1$-Lagrange de $V(\Omega^h)$ est une fonction de base $\mathbb{P}_1$-Lagrange de $V(E_h)$:
soit $i \in [\![1, E_h.n_q]\!]$ et $r = E_h.toGlobal(i)$, ($r \in [\![1, \Omega^h.n_q]\!]$).

$$E_h.\varphi_i = \Omega^h.\varphi_{r|E_h}$$

☞ Voir ep01.ring01

→ résultat utile pour la résolution de B.V.P. (Boundary Value Problem)!

Plan

1. Maillage
2. Espace discret
3. Fonctions de base
4. Interpolation

$\mathcal{C}^0(\Omega;\mathbb{K}) \approx V(\Omega_1^h) = \mathrm{Vect}\left\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{n_q}\right\}$ avec $n_q = \Omega_1^h.n_q$, $\varphi_i = \Omega_1^h.\varphi_i$, ...,

$\Rightarrow$ $\forall v_h \in V(\Omega_1^h)$, il existe $\boldsymbol{\mu} = (\mu_i)_{i=1}^{n_q} \in \mathbb{K}^{n_q}$ unique tels que

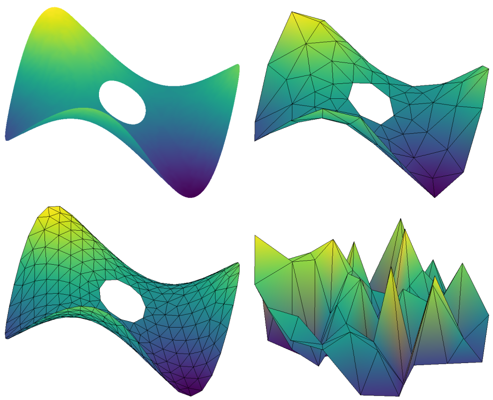
$$v_h(\mathrm{q}) = \sum_{i=1}^{n_q} \mu_i \varphi_i(\mathrm{q}), \ \forall \mathrm{q} \in \Omega_1^h.$$

$$v_h(\mathrm{q}^j) = \sum_{i=1}^{n_q} \mu_i \underbrace{\varphi_i(\mathrm{q}^j)}_{=\delta_{i,j}} = \mu_j, \quad \mathrm{q}^j = \Omega_1^h.\mathrm{q}^j.$$

Soient $u \in \mathcal{C}^0(\Omega;\mathbb{K})$ et $\boldsymbol{U} = (U_i)_{i=1}^{n_q} \in \mathbb{K}^{n_q}$, avec $U_i = u(\mathrm{q}^i)$. Alors

$$u(\mathrm{q}) \approx \sum_{i=1}^{n_q} u(q^i)\varphi_i(\mathrm{q}) = \sum_{i=1}^{n_q} U_i\varphi_i(\mathrm{q}) \stackrel{\mathsf{def}}{=} \pi_h(u)(\mathrm{q})$$

$$\text{Op. d'interpolation} \left\{ \begin{array}{rccl} \pi_h & : & V(\Omega_1) & \longrightarrow & V(\Omega_1^h) \\ & & u & \longmapsto & \pi_h(u) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n_q} u(q^i)\varphi_i \end{array} \right. , \ V(\Omega_1) = \mathcal{C}^0(\Omega;\mathbb{K}) \text{ ou } \mathrm{H}^1(\Omega_1) \text{ ou}$$



f= @(x,y) cos(pi*x).*sin(pi/3*y);

Représentation de $u_h \in V(\Omega_1^h)$

$$u_h(\mathrm{q}) = \sum_{i=1}^{n_\mathrm{q}} U_i \varphi_i(\mathrm{q})$$

en notant $\mathrm{q}^i = \Omega_1^h.\mathrm{q}^i \in \mathbb{R}^2$

- haut-gauche:
  Maillage fin ($\Omega_1^h.n_\mathrm{q} = 3328$),
  $U_i = \mathrm{f}(\mathrm{q}_1^i, \mathrm{q}_2^i)$
- haut:
  Maillage grossier ($\Omega_1^h.n_\mathrm{q} = 73$),
  $U_i = \mathrm{f}(\mathrm{q}_1^i, \mathrm{q}_2^i)$
- bas-gauche:
  Maillage moyen ($\Omega_1^h.n_\mathrm{q} = 298$),
  $U_i = \mathrm{f}(\mathrm{q}_1^i, \mathrm{q}_2^i)$
- bas-droit:
  Maillage grossier ($\Omega_1^h.n_\mathrm{q} = 73$),
  $U_i = \mathrm{rand}()$

☞ voir ep01.ring02

$\mathcal{C}^0(\Gamma_2;\mathbb{K}) \approx V(\Gamma_2^h) = \mathrm{Vect}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{n_\mathrm{q}}\}$

- Notations (locales):

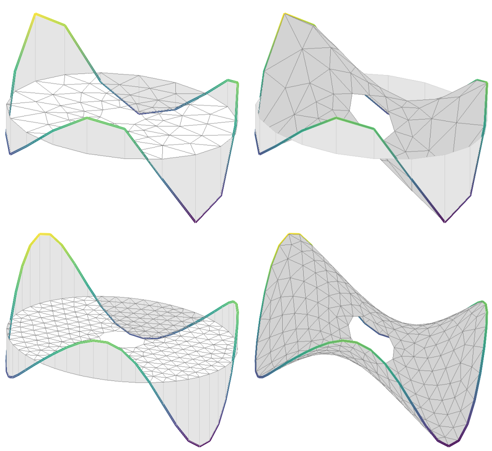
$$\mathrm{q} = \Gamma_2^h.\mathrm{q},\ n_\mathrm{q} = \Gamma_2^h.n_\mathrm{q},\ \mathrm{me} = \Gamma_2^h.\mathrm{me},\ \ldots,\ \varphi_i = \Gamma_2^h.\varphi_i,\ \ldots$$

Soient $u \in \mathcal{C}^0(\Gamma_2;\mathbb{K})$ et $\boldsymbol{U} = (U_i)_{i=1}^{n_\mathrm{q}} \in \mathbb{K}^{n_\mathrm{q}}$, avec $U_i = u(\mathrm{q}^i)$ et $\mathrm{q}^i = \Gamma_2^h.\mathrm{q}^i$. Alors

$$u(\mathrm{q}) \approx \sum_{i=1}^{n_\mathrm{q}} u(q^i)\varphi_i(\mathrm{q}) = \sum_{i=1}^{n_\mathrm{q}} U_i\varphi_i(\mathrm{q}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \pi_h(u)(\mathrm{q})$$

Opérateur d'interpolation $\left\{\begin{array}{cccc} \pi_h & : & V(\Gamma_2) & \longrightarrow & V(\Gamma_2^h) \\ & & u & \longmapsto & \pi_h(u) = \sum_{i=1}^{n_\mathrm{q}} u(q^i)\varphi_i \end{array}\right.$

avec $V(\Gamma_2) = \mathcal{C}^0(\Gamma_2;\mathbb{K})$ ou $\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma_2)$ ou ...



f= @(x,y) cos(pi*x).*sin(pi/3*y);

Représentation de $u_h \in V(\Gamma_2^h)$

$$u_h(\mathrm{q}) = \sum_{i=1}^{n_\mathrm{q}} U_i \varphi_i(\mathrm{q})$$

avec $\mathrm{q}^i = \Gamma_2^h.\mathrm{q}^i \in \mathbb{R}^2$ et $U_i = \mathrm{f}(\mathrm{q}_1^i, \mathrm{q}_2^i)$

- haut:
  Maillage grossier ($\Gamma_2^h.n_\mathrm{q} = 19$),
- bas:
  Maillage moyen ($\Gamma_2^h.n_\mathrm{q} = 51$),
- gauche: avec maillage
- droite: avec f en gris foncé

☞ voir ep01.ring03

Codes fournis

Codes fournis dans archive `ep01.tar.gz` permettant de reproduire les figures et utilisant le package simesh :

- `ep01.ring00` à `ep01.ring03` programmes Matlab/Octave,
- `ep01.plot_BasisFunction` fonction pour la représentation de fonctions de base en 2D,
- `ep01.special_plot` fonction pour la représentation de fonctions de base en 2D sur les bords,
- `ring.geo` fichier de géométrie pour GMSH dans répertoire `geofile`

Le contenu des codes n'est pas forcément à comprendre dès maintenant.