Ecole d'ingénieurs Sup Galilée
Energétique - Informatique - Instrumentation
Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique
Télécommunications et Réseaux

Ingénieurs MACS 2 - TP F.E.M. (S8)

Eléments finis $\mathbb{P}_1$-Lagrange en dimension > 1 : épisode 2

Coordonnées barycentriques sur un d-simplexe

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications
Institut Galilée
Université Paris XIII.

Objectif :

- Définition d'un d-simplexe $K \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$
- Définition des coordonnées barycentriques sur K,
- Volume de K,
- Gradients des coordonnées barycentriques sur K,
- Formule d'intégration sur K

☞ **Utilisation de resultats de**

[1] F.J. Vermolen and A. Segal.*On an integration rule for products of barycentric coordinates over simplexes in $\mathbb{R}^n$*, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 330:289 - 294, 2018.

[2] F. Cuvelier. *Exact integration for products of power of barycentric coordinates over d-simplexes in $\mathbb{R}^n$*, *hal-01816347*, 2018. pdf fourni

Plan

Définition: d-simplex

A d-simplex $K \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ is the convex hull of $(\mathrm{d}+1)$ points $\boldsymbol{q}^0, \ldots, \boldsymbol{q}^{\mathrm{d}}$ of $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ which form the vertices of K.

$$K = \left\{ \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \mid \boldsymbol{q} = \sum_{i=0}^{\mathrm{d}} \theta_i \boldsymbol{q}^i, \text{ with } \forall i \in [\![0, \mathrm{d}]\!],\ \theta_i \geqslant 0, \text{ and } \sum_{i=0}^{\mathrm{d}} \theta_i = 1 \right\}. \tag{1}$$

convex hull: *enveloppe convexe.*

For example, a 2-simplex is a triangle and a 3-simplex is a tetrahedron. It will be always assumed that a d-simplex is **not degenerated**, i.e., the set of vectors $\{\boldsymbol{q}^i - \boldsymbol{q}^0\}_{i=1}^{\mathrm{d}}$ is linearly independent.

Définition: barycentric coordinates on K of $\boldsymbol{q}$

Let $K \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ be a non-degenerate d-simplex and $\{\boldsymbol{q}^i\}_{i=0}^{\mathrm{d}}$ its vertices. The parametrization of K with a convex combination of the vertices reads as follows

$$K = \left\{ \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \mid \boldsymbol{q} = \sum_{i=0}^{\mathrm{d}} \lambda_i(\boldsymbol{q})\boldsymbol{q}^i, \text{ with } \forall i \in [\![0, \mathrm{d}]\!],\ \lambda_i(\boldsymbol{q}) \geqslant 0, \text{ and } \sum_{i=0}^{\mathrm{d}} \lambda_i(\boldsymbol{q}) = 1 \right\}. \quad (2)$$

The coefficients $\lambda_0(\boldsymbol{q}), \ldots, \lambda_{\mathrm{d}}(\boldsymbol{q})$ are called the barycentric coordinates on K of $\boldsymbol{q}$.

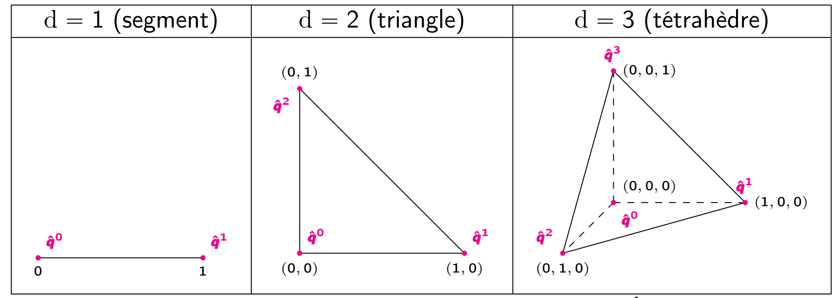
As immediat property, the barycentric coordinates on K satisfy

$$\lambda_i(\boldsymbol{q}^j) = \delta_{i,j}, \quad \forall (i,j) \in [\![0, \mathrm{d}]\!]. \quad (3)$$

The **unit d-simplex** $\hat{K}^{\mathrm{d}} \subset \mathbb{R}^{\mathrm{d}}$ is defined by the $(\mathrm{d}+1)$ vertices

$$\{\hat{\boldsymbol{q}}^0, \hat{\boldsymbol{q}}^1, \cdots, \hat{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{d}}\} = \{\boldsymbol{0}, \hat{\boldsymbol{e}}^1, \cdots, \hat{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{d}}\}$$

where $\{\hat{\boldsymbol{e}}^1, \ldots, \hat{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{d}}\}$ is the standard basis of $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$.



Représentation de d-simplexes unités $\hat{K}^{\mathrm{d}}$

Le volume du d-simplexe unité $\hat{K}^{\mathrm{d}}$, noté $|\hat{K}^{\mathrm{d}}|$, est $\frac{1}{\mathrm{d}!}$

Plan

Theorem: integration, change of variables, [2] page 8.

Let $K \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ be a non-degenerated d-simplex and $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$\int_K f(\boldsymbol{q}) d\,\boldsymbol{q} = \left|\det(\mathbb{A}_K^{t}\mathbb{A}_K)\right|^{1/2} \int_{\hat{K}} f \circ \mathcal{F}_K(\hat{\boldsymbol{q}}) d\hat{\boldsymbol{q}} \quad (4)$$

where $\hat{K}$ is the unit d-simplex in $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$, $\mathbb{A}_K \in \mathcal{M}_{\mathrm{n},\mathrm{d}}(\mathbb{R})$ is defined by

$$\mathbb{A}_K = \left(\boldsymbol{q}^1 - \boldsymbol{q}^0 \;\vdots\; \boldsymbol{q}^2 - \boldsymbol{q}^0 \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; \boldsymbol{q}^{\mathrm{d}} - \boldsymbol{q}^0 \right) \quad (5)$$

and $\mathcal{F}_K : \hat{K} \longrightarrow K$ is given by

$$\mathcal{F}_K(\hat{\boldsymbol{q}}) = \mathbb{A}_K\hat{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{q}^0 \quad (6)$$

Avec $\mathrm{d} = \mathrm{n}$, $\displaystyle\int_K f(\boldsymbol{q}) d\,\boldsymbol{q} = |\det(\mathbb{A}_K)| \int_{\hat{K}} f \circ \mathcal{F}_K(\hat{\boldsymbol{q}}) d\hat{\boldsymbol{q}}$

Exo: Calcul de $|K|$, volume du d-simplexe $K \subset \mathbb{R}^\mathrm{n}$ de sommets $\{\boldsymbol{q}^i\}_{i=0}^{\mathrm{d}}$

Rappels:

1. $\int_K f(\boldsymbol{q})d\,\boldsymbol{q} = \left|\det(\mathbb{A}_K^{\mathtt{t}}\mathbb{A}_K)\right|^{1/2} \int_{\hat{K}} f \circ \mathcal{F}_K(\hat{\boldsymbol{q}})d\hat{\boldsymbol{q}}$
2. $\mathbb{A}_K = \left(\boldsymbol{q}^1 - \boldsymbol{q}^0 \,\middle|\, \boldsymbol{q}^2 - \boldsymbol{q}^0 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, \boldsymbol{q}^\mathrm{d} - \boldsymbol{q}^0 \right) \in \mathcal{M}_{\mathrm{n},\mathrm{d}}(\mathbb{R})$
3. $|\hat{K}| = 1/\mathrm{d}!$

Le volume de d-simplexe $K \subset \mathbb{R}^\mathrm{n}$ de sommets $\{\boldsymbol{q}^i\}_{i=0}^{\mathrm{d}}$ est

$$|K| = \frac{1}{\mathrm{d}!}\left|\det(\mathbb{A}_K^{\mathtt{t}}\mathbb{A}_K)\right|^{1/2}$$

avec

$$\mathbb{A}_K = \left(\boldsymbol{q}^1 - \boldsymbol{q}^0 \,\middle|\, \boldsymbol{q}^2 - \boldsymbol{q}^0 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, \boldsymbol{q}^\mathrm{d} - \boldsymbol{q}^0 \right) \in \mathcal{M}_{\mathrm{n},\mathrm{d}}(\mathbb{R})$$

Si $\mathrm{d} = \mathrm{n}$, on a aussi

$$|K| = \frac{1}{\mathrm{d}!}\left|\det(\mathbb{A}_K)\right|$$

Exo: écrire une fonction Octave/Matlab, volume, permettant de calculer $|K|$. Cette fonction sera enregistrée dans le répertoire `+simplex`.

Lemma: gradients of barycentric coordinates on a d-simplex, [2] page 6.

Let $K \subset \mathbb{R}^\mathrm{n}$ be a non-degenerate d-simplex and and $\{\boldsymbol{q}^i\}_{i=0}^{\mathrm{d}}$ its vertices. The barycentric coordinates $(\lambda_i(\boldsymbol{q}))_{i=0}^{\mathrm{d}}$ are solution of the linear system

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \;\cdots\; 1 \\ 0 & \\ \vdots & \mathbb{A}_K^{\mathtt{t}}\mathbb{A}_K \\ 0 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_0(\boldsymbol{q}) \\ \lambda_1(\boldsymbol{q}) \\ \vdots \\ \lambda_\mathrm{d}(\boldsymbol{q}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ \mathbb{A}_K(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}^0) \end{pmatrix} \tag{7}$$

where $\mathbb{A}_K \in \mathcal{M}_{\mathrm{n},\mathrm{d}}(\mathbb{R})$ is defined by

$$\mathbb{A}_K = \left(\boldsymbol{q}^1 - \boldsymbol{q}^0 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, \boldsymbol{q}^\mathrm{d} - \boldsymbol{q}^0 \right) \tag{8}$$

The barycentric coordinates are multivariate polynomials of first degree and their gradients are given by

$$\left(\nabla\lambda_1(\boldsymbol{q}) \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, \nabla\lambda_\mathrm{d}(\boldsymbol{q}) \right) = \mathbb{A}_K(\mathbb{A}_K^{\mathtt{t}}\mathbb{A}_K)^{-1} \tag{9}$$

and

$$\nabla\lambda_0(\boldsymbol{q}) = -\sum_{i=1}^{\mathrm{d}} \nabla\lambda_i(\boldsymbol{q}). \tag{10}$$

Les $\nabla\lambda_i(\boldsymbol{q})$ sont constants.

$$\text{Avec } \mathrm{d} = \mathrm{n}, \quad \left(\nabla\lambda_1(\boldsymbol{q}) \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, \nabla\lambda_\mathrm{d}(\boldsymbol{q}) \right) = (\mathbb{A}_K^{-1})^{\mathtt{t}} \tag{11}$$

Exo: écrire une fonction Octave/Matlab, gradBaCo, permettant de calculer, $\forall i \in [\![0, \mathrm{d}]\!]$, $\nabla\lambda_i(\boldsymbol{q})$ sur K, retournés sous la forme d'une matrice de $\mathcal{M}_{\mathrm{d}+1,\mathrm{n}}(\mathbb{R})$. Cette fonction sera enregistrée dans le répertoire `+simplex`.

1. K : d-simplexe $K \subset \mathbb{R}^\mathrm{n}$ de sommets $\{\boldsymbol{q}^i\}_{i=0}^{\mathrm{d}}$,
2. $\mathbb{A}_K = \left(\boldsymbol{q}^1 - \boldsymbol{q}^0 \,\middle|\, \boldsymbol{q}^2 - \boldsymbol{q}^0 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, \boldsymbol{q}^\mathrm{d} - \boldsymbol{q}^0 \right) \in \mathcal{M}_{\mathrm{n},\mathrm{d}}(\mathbb{R})$
3. $\left(\nabla\lambda_1(\boldsymbol{q}) \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, \nabla\lambda_\mathrm{d}(\boldsymbol{q}) \right) = \mathbb{A}_K(\mathbb{A}_K^{\mathtt{t}}\mathbb{A}_K)^{-1} \quad \left(= (\mathbb{A}_K^{-1})^{\mathtt{t}}, \text{si } \mathrm{d} = \mathrm{n} \right)$
4. $\nabla\lambda_0(\boldsymbol{q}) = -\sum_{i=1}^{\mathrm{d}} \nabla\lambda_i(\boldsymbol{q})$.

Theorem: magic formula on a d-simplex $K \subset \mathbb{R}^n$, [2] page 2.

Let $\boldsymbol{\nu} = (\nu_0, \ldots, \nu_d) \in \mathbb{N}^{d+1}$, then

$$\int_K \prod_{i=0}^{d} \lambda_i^{\nu_i}(\boldsymbol{q})d\,\boldsymbol{q} = d!|K| \frac{\prod_{i=0}^{d}(\nu_i!)}{(d + \sum_{i=0}^{d} \nu_i)!} \tag{12}$$

where $|K|$ is the volume of K and $(\lambda_i(\boldsymbol{q}))_{i=0}^{d}$ are the barycentric coordinates on K of $\boldsymbol{q}$.

$\rightarrow$ On utilisera cette formule dans le cadre de la méthode des éléments finis $\mathbb{P}_1$-Lagrange.

Plan

Définition 1: matrice élémentaire de $\mathcal{D}$ sur un d-simplexe $K \subset \mathbb{R}^n$

Soient $\{\boldsymbol{q}^i\}_{i=0}^{d}$ les $(d+1)$ sommets de K, $\{\lambda_i\}_{i=0}^{d}$ les coordonnées barycentriques de K et $\mathcal{D}(\bullet, \bullet)$ un opérateur bilinéaire.
Alors $\mathbb{A}^{e,\mathcal{D}}(K) \in \mathcal{M}_{d+1}(\mathbb{R})$, **matrice élémentaire de $\mathcal{D}$ sur K**, est définie par

$$\mathbb{A}^{e,\mathcal{D}}_{i+1,j+1}(K) = \int_K \mathcal{D}(\lambda_j, \lambda_i)(\boldsymbol{q})d\,\boldsymbol{q}, \ \forall (i,j) \in [\![0, d]\!]^2 \tag{13}$$

- avec $\mathcal{D}(u, v) = u.v$: **matrice de Masse élémentaire**,
- avec $\mathcal{D}(u, v) = \langle \boldsymbol{\nabla} u, \boldsymbol{\nabla} v \rangle$: **matrice de Rigidité élémentaire**, si $d < n$ alors $\boldsymbol{\nabla}$ correspond au gradient surfacique ou tangentiel.
- $(r, s) \in [\![1, n]\!]^2$, $\mathcal{D}(u, v) = \frac{\partial u}{\partial x_r}.v$, $\mathcal{D}(u, v) = \frac{\partial u}{\partial x_r}.\frac{\partial v}{\partial x_s}$, ...

Exo:

a. Calculer la **matrice de Masse élémentaire** (i.e. avec $\mathcal{D}(u, v) = u.v$,) en fonction de d et de $|K|$ (volume de K).
b. Vérifier que $\sum_{i=1}^{d+1}\sum_{j=1}^{d+1} \mathbb{A}^{e,\mathcal{D}}_{i,j}(K) = |K|$.

1. $\mathbb{A}^{e,\mathcal{D}}_{i+1,j+1}(K) = \int_K \mathcal{D}(\lambda_j, \lambda_i)(\boldsymbol{q})d\,\boldsymbol{q} = \int_K \lambda_j(\boldsymbol{q})\lambda_i(\boldsymbol{q})d\,\boldsymbol{q}$, $\forall (i,j) \in [\![0, d]\!]^2$
2. $\int_K \prod_{i=0}^{d} \lambda_i^{\nu_i}(\boldsymbol{q})d\,\boldsymbol{q} = d!|K| \frac{\prod_{i=0}^{d}(\nu_i!)}{(d + \sum_{i=0}^{d} \nu_i)!}$ avec $\boldsymbol{\nu} = (\nu_0, \ldots, \nu_d) \in \mathbb{N}^{d+1}$,

Exo: Ecrire une fonction Matlab/Octave, MasseElem, permettant de calculer la **matrice de Masse élémentaire** pour le d-simplexe $K \subset \mathbb{R}^n$. Cette fonction sera enregistrée dans le répertoire `+simplex`.

1. $\mathbb{A}^{e,\mathcal{D}}_{i+1,j+1}(K) = \int_K \lambda_j(\boldsymbol{q})\lambda_i(\boldsymbol{q})d\,\boldsymbol{q} = \frac{|K|}{(d+1)(d+2)}(1+\delta_{i,j}), \ \forall (i,j) \in [\![0, d]\!]^2$

Exo:

a. Calculer la **matrice de Rigidité élémentaire** (i.e. avec $\mathcal{D}(u,v) = \langle \nabla u, \nabla v \rangle$) en fonction de $|K|$ (volume de K) et des gradients des coordonnées barycentriques sur K.
b. Vérifier que $\sum_{i=1}^{d+1} \mathbb{A}^{e,\mathcal{D}}_{i,j}(K) = \sum_{i=1}^{d+1} \mathbb{A}^{e,\mathcal{D}}_{j,i}(K) = 0, \ \forall j \in [\![1, d+1]\!]$

1. $\mathbb{A}^{e,\mathcal{D}}_{i+1,j+1}(K) = \int_K \mathcal{D}(\lambda_j, \lambda_i)(\boldsymbol{q})d\,\boldsymbol{q} = \int_K \langle \nabla \lambda_j(\boldsymbol{q}), \nabla \lambda_i(\boldsymbol{q}) \rangle \, d\,\boldsymbol{q}, \ \forall (i,j) \in [\![0, d]\!]^2$
2. $\sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i(\boldsymbol{q}) = 1$

Exo: Ecrire une fonction Matlab/Octave, RigiditeElem, permettant de calculer la **matrice de Rigidité élémentaire** pour le d-simplexe $K \subset \mathbb{R}^n$. Cette fonction sera à données minimales et enregistrée dans le répertoire `+simplex`.

1. $\mathbb{A}^{e,\mathcal{D}}_{i+1,j+1}(K) = \int_K \langle \nabla \lambda_j(\boldsymbol{q}), \nabla \lambda_i(\boldsymbol{q}) \rangle \, d\,\boldsymbol{q} = |K| \langle \nabla \lambda_j(\boldsymbol{q}), \nabla \lambda_i(\boldsymbol{q}) \rangle, \ \forall (i,j) \in [\![0, d]\!]^2$

Exo: Soient $r \in [\![1, n]\!]$ et $\mathcal{D}(u,v) = \frac{\partial u}{\partial x_r}.v$.

1. Calculer la matrice élémentaire $\mathbb{A}^{e,\mathcal{D}}(K)$ en fonction de $|K|$ (volume de K), des gradients des coordonnées barycentriques sur K et de r.
2. Ecrire une fonction Matlab/Octave, MatElem_duv, permettant de calculer cette matrice.

☞ Travail à faire en autonomie

Exo: Soit $(r,s) \in [\![1, n]\!]^2$ et $\mathcal{D}(u,v) = \frac{\partial u}{\partial x_r}.\frac{\partial v}{\partial x_s}$.

1. Calculer la matrice élémentaire $\mathbb{A}^{e,\mathcal{D}}(K)$ en fonction de $|K|$ (volume de K), des gradients des coordonnées barycentriques sur K, de r et de s.
2. Ecrire une fonction Matlab/Octave, MatElem_dudv, permettant de calculer cette matrice.

☞ Travail à faire en autonomie

Fonctions Matlab/Octave écrites

- simplex.volume ☞ fichier `volume.m` dans répertoire `+simplex`
- simplex.gradBaCo ☞ fichier `gradBaCo.m` dans répertoire `+simplex`
- simplex.MasseElem ☞ fichier `MasseElem.m` dans répertoire `+simplex`
- simplex.RigiditeElem ☞ fichier `RigiditeElem.m` dans répertoire `+simplex`