Ecole d'ingénieurs Sup Galilée
Energétique - Informatique - Instrumentation
Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique
Télécommunications et Réseaux

Ingénieurs MACS 2 - TP F.E.M. (S8)

Eléments finis $\mathbb{P}_1$-Lagrange en dimension $\geqslant 1$: épisode 7

B.V.P. : implémentation

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications
Institut Galilée
Université Paris XIII.

2024/03/23

Prérequis

- Cours de Mr Vauchelet,
- Les épisodes précédents.

Objectif : Mise en oeuvre des éléments finis $\mathbb{P}_1$-Lagrange

- Utilisation de tous les outils/fonctions développés,
- Importance de la validation des codes,
- Matlab/Octave, passage de fonctions en paramètre avec nombre variable d'arguments en sortie,

$$(1)\left\{\begin{array}{rll}\eta u-\Delta u=f, & \text{dans } \Omega & (1a)\\ u=g_D, & \text{sur } \Gamma^D & (1b)\\ \dfrac{\partial u}{\partial n}+\alpha u=g_R, & \text{sur } \Gamma^R & (1c)\end{array}\right.$$

$\Omega\subset\mathbb{R}^n$ un domaine borné, connexe de frontière, $\partial\Omega$, $\mathcal{C}^1$ par morceaux. $\partial\Omega=\Gamma^D\cup\Gamma^R$, avec $\mathring{\Gamma}^D\cap\mathring{\Gamma}^R=\emptyset$.

Résumé épisode 5: formulation variationnelle

Soient $f\in\mathrm{L}^2(\Omega)$, $g_R\in\mathrm{L}^2(\Gamma^R)$, $g_D\in\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma^D)$, $\eta\geqslant 0$ et $\alpha\geqslant 0$.

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Trouver } u\in\mathrm{H}^1_{g_D,\Gamma^D}(\Omega) \text{ tel que}\\ \mathcal{A}(u,v)=\mathcal{L}(v),\ \forall v\in\mathrm{H}^1_{0,\Gamma^D}(\Omega)\end{array}\right. \qquad \text{(F.V.)}$$

avec

$$\mathcal{A}(u,v)\stackrel{\text{def}}{=}\eta\int_\Omega u.v d\mathrm{q}+\int_\Omega\langle\nabla u,\nabla v\rangle d\mathrm{q}+\alpha\int_{\Gamma^R}uv d\sigma$$
$$\mathcal{L}(v)\stackrel{\text{def}}{=}\int_\Omega f.v d\mathrm{q}+\int_{\Gamma^R}g_R v d\sigma$$

$$(1)\left\{\begin{array}{rll}\eta u-\Delta u=f, & \text{dans } \Omega & (1a)\\ u=g_D, & \text{sur } \Gamma^D & (1b)\\ \dfrac{\partial u}{\partial n}+\alpha u=g_R, & \text{sur } \Gamma^R & (1c)\end{array}\right.$$

$\Omega\subset\mathbb{R}^n$ un domaine borné, connexe de frontière, $\partial\Omega$, $\mathcal{C}^1$ par morceaux. $\partial\Omega=\Gamma^D\cup\Gamma^R$, avec $\mathring{\Gamma}^D\cap\mathring{\Gamma}^R=\emptyset$.

Résumé épisode 6: formulation variationnelle discrète

$$V(\Omega_h)\stackrel{\text{def}}{=}\left\{v\in\mathcal{C}^0(\Omega_h;\mathbb{R}) \text{ tq } \forall k\in[\![1,n_{\mathrm{me}}]\!],\ v_{|K_k}\in\mathbb{R}_1[X_1,\ldots,X_n]\right\}=\mathrm{Vect}\left\{\varphi_1,\ldots,\varphi_{n_q}\right\}$$
$$V_{g_D,\Gamma_h^D}(\Omega_h)\stackrel{\text{def}}{=}\left\{v\in V(\Omega_h) \text{ t.q. } v=\sum_{i\in\mathcal{I}_D}g_D(q_i)\varphi_i+\sum_{i\in\mathcal{I}_D^c}\mu_i\varphi_i,\ \forall\mu_i\in\mathbb{R}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Trouver } u_h\in V_{g_D,\Gamma_h^D}(\Omega_h) \text{ tel que}\\ \mathcal{A}_h(u_h,v_h)=\mathcal{L}_h(v_h),\ \forall v_h\in V_{0,\Gamma_h^D}(\Omega_h)\end{array}\right. \qquad \text{(F.V.H)}$$

avec

$$\mathcal{A}_h(u_h,v_h)\stackrel{\text{def}}{=}\eta\int_{\Omega_h}u_h.v_h d\mathrm{q}+\int_{\Omega_h}\langle\nabla u_h,\nabla v_h\rangle d\mathrm{q}+\alpha\int_{\Gamma_h^R}u_h v_h d\sigma$$
$$\mathcal{L}_h(v_h)\stackrel{\text{def}}{=}\int_{\Omega_h}f.v_h d\mathrm{q}+\int_{\Gamma_h^R}g_R v_h d\sigma$$

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_{g_D,\Gamma_h^D}(\Omega_h) \text{ tel que} \\ \mathcal{A}_h(u_h, v_h) = \mathcal{L}_h(v_h), \ \forall v_h \in V_{0,\Gamma_h^D}(\Omega_h) \end{cases} \qquad \text{(F.V.H)}$$

Résumé épisode 6: écriture matricielle

$$\text{(F.V.H)} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_{g_D,\Gamma_h^D}(\Omega_h) \text{ tel que} \\ \mathcal{A}_h(u_h, \varphi_i) = \mathcal{L}_h(\varphi_i), \ \forall i \in \mathcal{I}_D^c \end{cases}$$

On note $\mathbb{A}^h \in \mathcal{M}_{n_q}(\mathbb{R})$, definie par $\mathbb{A}^h_{i,j} = \mathcal{A}_h(\varphi_j, \varphi_i)$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{n_q}$, $\boldsymbol{b}_i = \mathcal{L}_h(\varphi_i)$ et
$\boldsymbol{U} = (u_j)_{j=1}^{n_q} \in \mathbb{R}^{n_q}$, $u_h = \sum_{j=1}^{n_q} u_j\varphi_j$.
$\mathcal{I}_D \subset [\![1, n_q]\!]$ indices Dirichlet et

$$\boldsymbol{R} \in \mathbb{R}^{n_q} \text{ t.q. } \boldsymbol{R}_i = g_D(q^i), \ \forall i \in \mathcal{I}_D \text{ et } \boldsymbol{R}_i = 0, \ \forall i \in \mathcal{I}_D^c$$

méthode 1 (inconnues Dirichlet)

$$(S_D) \begin{cases} \text{Trouver } \boldsymbol{U} \in \mathbb{R}^{n_q} \text{ tel que} \\ \mathbb{A}^h_{i,:} * \boldsymbol{U} = \boldsymbol{b}_i, \ \forall i \in \mathcal{I}_D^c \\ \boldsymbol{U}_i = \boldsymbol{R}_i, \ \forall i \in \mathcal{I}_D \end{cases}$$

méthode 2 (relèvement de g_D)

$$(S_R) \begin{cases} \text{Trouver } \boldsymbol{U}_{\mathcal{I}_D^c}, \text{ tel que} \\ \mathbb{A}^h_{i,\mathcal{I}_D^c} * \boldsymbol{U}_{\mathcal{I}_D^c} = \boldsymbol{b}_i - \mathbb{A}^h_{i,\mathcal{I}_D} * \boldsymbol{R}_{\mathcal{I}_D}, \ \forall i \in \mathcal{I}_D^c \end{cases}$$

Soient $\mathbb{A}^h \in \mathcal{M}_{n_q}(\mathbb{R})$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{n_q}$, $\boldsymbol{R} \in \mathbb{R}^{n_q}$ et $\mathcal{I}_D \subset [\![1, n_q]\!]$ donnés.
On cherche $\boldsymbol{U} \in \mathbb{R}^{n_q}$ (i.e. $u_h = \sum_{j=1}^{n_q} \boldsymbol{U}_j\varphi_j$).

méthode 1 (inconnues Dirichlet)

$$(S_D) \begin{cases} \text{Trouver } \boldsymbol{U} \in \mathbb{R}^{n_q} \text{ tel que} \\ \mathbb{A}^h_{i,:} * \boldsymbol{U} = \boldsymbol{b}_i, \ \forall i \in \mathcal{I}_D^c \\ \boldsymbol{U}_i = \boldsymbol{R}_i, \ \forall i \in \mathcal{I}_D \end{cases}$$

méthode 2 (relèvement de g_D)

$$(S_R) \begin{cases} \text{Trouver } \boldsymbol{U}_{\mathcal{I}_D^c}, \text{ tel que} \\ \mathbb{A}^h_{i,\mathcal{I}_D^c} * \boldsymbol{U}_{\mathcal{I}_D^c} = \boldsymbol{b}_i - \mathbb{A}^h_{i,\mathcal{I}_D} * \boldsymbol{R}_{\mathcal{I}_D}, \ \forall i \in \mathcal{I}_D^c \end{cases}$$

avec $\boldsymbol{U}_{\mathcal{I}_D} = \boldsymbol{R}_{\mathcal{I}_D}$.

Exo: Ecrire une fonction FEM.solveBVPsystem retournant $\boldsymbol{U}$ par l'une des deux méthodes (choix de la méthode passé en paramètre)

Résolution de système linéaire creux avec Matlab/Octave: U=A\b ; (fonction mldivide)
De nombreuses autres fonctions existent : pcg, bicg, bicgstab, gmres, minres, ...
☞ FEM.solveBVPsystemV2 permet de choisir la fonction pour résoudre le système linéaire et de récupérer plusieurs arguments en sortie... voir ep07.P3V2.

Plan

$\mathbb{A}^h \in \mathcal{M}_{n_q}(\mathbb{R})$, definie par $\mathbb{A}^h_{i,j} = \mathcal{A}_h(\varphi_j, \varphi_i)$ avec

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_h(\varphi_j, \varphi_i) &\stackrel{\text{def}}{=} \eta \int_{\Omega_h} \varphi_j.\varphi_i dq + \int_{\Omega_h} \langle \boldsymbol{\nabla} \varphi_j, \boldsymbol{\nabla} \varphi_i \rangle dq + \alpha \int_{\Gamma_h^R} \varphi_j\varphi_i d\sigma \\ &= \eta\mathbb{M}_{i,j}(\Omega_h) + \mathbb{K}_{i,j}(\Omega_h) + \alpha\mathbb{M}^G_{i,j}(\Gamma_h^R) \end{aligned}$$

où $\mathbb{M}(\Omega_h)$ et $\mathbb{K}(\Omega_h)$ sont resp. les matrices de **Masse** et de **Rigidité** sur Ω_h, et $\mathbb{M}^G(\Gamma_h^R) \in \mathcal{M}_{n_q}(\mathbb{R})$ matrice de Masse sur Γ_h^R en numérotation globale.

☞ voir épisodes 3 et 4

$$\mathbb{A}^h = \eta\mathbb{M}(\Omega_h) + \mathbb{K}(\Omega_h) + \alpha\mathbb{M}^G(\Gamma_h^R) \qquad (3)$$

avec

$$\mathbb{M}^G(\Gamma_h^R) = \sum_{l \in Rlabs} \mathbb{M}^G(\Gamma_l^h)$$

Plan

$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{n_q}$, definie par $\boldsymbol{b}_i = \mathcal{L}_h(\varphi_i)$ avec

$$\mathcal{L}_h(\varphi_i) = \int_{\Omega_h} f.\varphi_i d\mathrm{q} + \int_{\Gamma_h^R} g_R \varphi_i d\sigma$$

- Si f est **continue** sur Ω_h, on approche f par $\pi_h(f) = \sum_{j=1}^{n_q} f(\mathrm{q}^j)\varphi_j \in V(\Omega_h)$.

  On note $\boldsymbol{F} \in \mathbb{R}^{n_q}$, $\boldsymbol{F}_j = f(\mathrm{q}^j)$, $\forall j \in [\![1, n_q]\!]$.

$$\int_{\Omega_h} f.\varphi_i d\mathrm{q} \approx \left\langle \mathbb{M}(\Omega_h) * \boldsymbol{F}, \boldsymbol{e}^i \right\rangle$$

où $\boldsymbol{e}^i$, i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^{n_q}$ et $\mathbb{M}(\Omega_h)$, matrice de **Masse** de Ω_h.

✗ peut-être un peu trop restrictif!

$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{n_q}$, definie par $\boldsymbol{b}_i = \mathcal{L}_h(\varphi_i)$ avec

$$\mathcal{L}_h(\varphi_i) = \int_{\Omega_h} f.\varphi_i d\mathrm{q} + \int_{\Gamma_h^R} g_R \varphi_i d\sigma$$

- Si g_R est **continue** sur Γ_h^R, construit un relèvement discret de g_R,

$$g_h^R = \sum_{j \in \mathcal{I}_R} g_R(\mathrm{q}^j)\varphi_j \in V(\Omega_h)$$

où $\mathcal{I}_R \subset [\![1, n_q]\!]$ est l'ensemble des indices des points du bord Γ_h^R.
On note $\boldsymbol{G} \in \mathbb{R}^{n_q}$, t.q. $\boldsymbol{G}_j = g_R(\mathrm{q}^j)$, $\forall j \in \mathcal{I}_R$ et $\boldsymbol{G}_i = 0$, sinon.

$$\int_{\Gamma_h^R} g_R \varphi_i d\sigma \approx \left\langle \mathbb{M}^G(\Gamma_h^R) * \boldsymbol{G}, \boldsymbol{e}^i \right\rangle$$

où $\mathbb{M}^G(\Gamma_h^R) \in \mathcal{M}_{n_q}(\mathbb{R})$ matrice de Masse sur Γ_h^R en numérotation globale et $\boldsymbol{e}^i$, i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^{n_q}$.

✗ souvent trop restrictif!

$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{n_q}$, definie par $\boldsymbol{b}_i = \mathcal{L}_h(\varphi_i)$ avec

$$\mathcal{L}_h(\varphi_i) = \int_{\Omega_h} f.\varphi_i d\mathrm{q} + \int_{\Gamma_h^R} g_R \varphi_i d\sigma$$

- Si f n'est **pas continue** sur Ω_h. En supposant
  - $\Omega_h = \bigcup_{l \in labs} \Omega_l^h$ où les Ω_l^h sont des maillages élémentaires de Ω_h (n-simplexes)
  - f est continue sur Ω_l^h, $\forall l \in labs$.

$$\int_{\Omega_h} f.\varphi_i d\mathrm{q} = \sum_{l \in labs} \int_{\Omega_l^h} f.\varphi_i d\mathrm{q}$$

On note $\boldsymbol{F}^l \in \mathbb{R}^{n_q}$, $\boldsymbol{F}_j^l = f(\mathrm{q}^j)$, si $\mathrm{q}^j \in \overline{\Omega_l^h}$ (i.e. $j \in \Omega_l^h.toGlobal$) et $\boldsymbol{F}_j^l = 0$, sinon.

$$\int_{\Omega_h} f.\varphi_i d\mathrm{q} \approx \sum_{l \in labs} \left\langle \mathbb{M}^G(\Omega_l^h) * \boldsymbol{F}^l, \boldsymbol{e}^i \right\rangle = \left\langle \sum_{l \in labs} \mathbb{M}^G(\Omega_l^h) * \boldsymbol{F}^l, \boldsymbol{e}^i \right\rangle$$

où $\mathbb{M}^G(\Omega_l^h) \in \mathcal{M}_{n_q}(\mathbb{R})$ matrice de Masse sur Ω_l^h en numérotation globale.

$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{n_q}$, definie par $\boldsymbol{b}_i = \mathcal{L}_h(\varphi_i)$ avec

$$\mathcal{L}_h(\varphi_i) = \int_{\Omega_h} f.\varphi_i d\mathrm{q} + \int_{\Gamma_h^R} g_R \varphi_i d\sigma$$

- Si g_R n'est **pas continue** sur Γ_h^R. En supposant
  - $\Gamma_h^R = \bigcup_{l \in Rlabs} \Gamma_l^h$ où les Γ_l^h sont des maillages élémentaires de Ω_h ($(n-1)$-simplexes).
  - g_R est continue sur Γ_l^h, $\forall l \in Rlabs$.

$$\int_{\Gamma_h^R} g_R.\varphi_i d\mathrm{q} = \sum_{l \in Rlabs} \int_{\Gamma_l^h} g_R.\varphi_i d\mathrm{q}$$

On note $\boldsymbol{G}^l \in \mathbb{R}^{n_q}$, $\boldsymbol{G}_j^l = g_R(\mathrm{q}^j)$, si $\mathrm{q}^j \in \overline{\Gamma_l^h}$ (i.e. $j \in \Gamma_l^h.toGlobal$) et $\boldsymbol{G}_j^l = 0$, sinon.

$$\int_{\Gamma_h^R} g_R.\varphi_i d\mathrm{q} \approx \sum_{l \in Rlabs} \left\langle \mathbb{M}^G(\Gamma_l^h) * \boldsymbol{G}^l, \boldsymbol{e}^i \right\rangle = \left\langle \sum_{l \in Rlabs} \mathbb{M}^G(\Gamma_l^h) * \boldsymbol{G}^l, \boldsymbol{e}^i \right\rangle$$

où $\mathbb{M}^G(\Gamma_l^h) \in \mathcal{M}_{n_q}(\mathbb{R})$ matrice de Masse sur Γ_l^h en numérotation globale.

$$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{n_q}, \quad \boldsymbol{b}_i = \int_{\Omega_h} f.\varphi_i d\mathrm{q} + \int_{\Gamma_h^R} g_R \varphi_i d\sigma$$

En résumé, pour le calcul du second membre:

- $\Omega_h = \bigcup_{l \in labs} \Omega_l^h$ où les Ω_l^h sont des maillages élémentaires de Ω_h (n-simplexes),
- f est continue sur Ω_l^h, $\forall l \in labs$, et, on note

$$\boldsymbol{F}^l \in \mathbb{R}^{n_q}, \ \boldsymbol{F}_j^l = f(\mathrm{q}^j), \text{ si } \mathrm{q}^j \in \overline{\Omega_l^h} \ \text{ (i.e. } j \in \Omega_l^h.toGlobal \text{) et } \boldsymbol{F}_j^l = 0, \ \text{ sinon.}$$

- $\Gamma_h^R = \bigcup_{l \in Rlabs} \Gamma_l^h$ où les Γ_l^h sont des maillages élémentaires de Ω_h ($(n-1)$-simplexes),
- g_R est continue sur Γ_l^h, $\forall l \in Rlabs$, et on note $\boldsymbol{G}^l \in \mathbb{R}^{n_q}$,

$$\boldsymbol{G}_j^l = g_R(\mathrm{q}^j), \text{ si } \mathrm{q}^j \in \overline{\Gamma_l^h} \text{ (i.e. } j \in \Gamma_l^h.toGlobal\text{) et } \boldsymbol{G}_j^l = 0, \text{ sinon.}$$

$$\boldsymbol{b} \approx \sum_{l \in labs} \mathbb{M}^G(\Omega_l^h) * \boldsymbol{F}^l + \sum_{l \in Rlabs} \mathbb{M}^G(\Gamma_l^h) * \boldsymbol{G}^l \quad (4)$$

Algorithme générique

$$(1) \begin{cases} \eta u - \Delta u = f, & \text{dans } \Omega \quad (1a) \\ u = g_D, & \text{sur } \Gamma^D \quad (1b) \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g_R, & \text{sur } \Gamma^R \quad (1c) \end{cases}$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné, connexe de frontière, $\partial\Omega$, $\mathcal{C}^1$ par morceaux.
$\partial\Omega = \Gamma^D \cup \Gamma^R$, avec $\mathring{\Gamma^D} \cap \mathring{\Gamma^R} = \emptyset$.

- Calcul de $\mathbb{A}_h$

$$\mathbb{A}^h = \eta \mathbb{M}(\Omega_h) + \mathbb{K}(\Omega_h) + \alpha \mathbb{M}^G(\Gamma_h^R) \quad (3)$$

avec $\mathbb{M}^G(\Gamma_h^R) = \sum_{l \in Rlabs} \mathbb{M}^G(\Gamma_l^h)$.

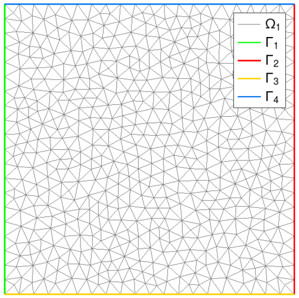
- Calcul de $\boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{b} \approx \sum_{l \in labs} \mathbb{M}^G(\Omega_l^h) * \boldsymbol{F}^l + \sum_{l \in Rlabs} \mathbb{M}^G(\Gamma_l^h) * \boldsymbol{G}^l \quad (4)$$

- Prise en compte des C.L. de Dirichlet: méthode 1 ou 2

☞ Utilisation de FEM.solveBVPsystem

Plan

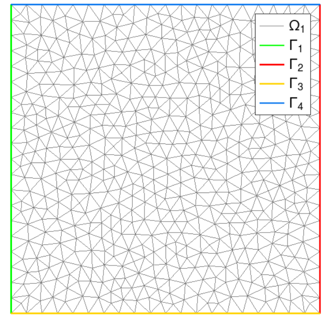


$$
(1)\begin{cases}
\eta u - \Delta u = f, & \text{dans } \Omega \quad (1a)\\
u = g_D, & \text{sur } \Gamma^D \quad (1b)\\
\dfrac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g_R, & \text{sur } \Gamma^R \quad (1c)
\end{cases}
$$

Validations progressives. avec solution exacte

1. $\eta = 0$, $\Gamma^R = \emptyset$, ☞ Dirichlet
2. $\eta > 0$, $\Gamma^R = \emptyset$, ☞ Dirichlet
3. $\eta > 0$, $\Gamma^D = \emptyset$, $\alpha = 0$, ☞ Neumann
4. $\eta = 0$, $\Gamma^D = \emptyset$, $\alpha > 0$, ☞ Robin
5. $\eta > 0$, $\Gamma^D = \emptyset$, $\alpha > 0$, ☞ Robin
6. $\eta = 0$, $\Gamma^D \neq \emptyset$, $\Gamma^R \neq \emptyset$, $\alpha = 0$,
7. $\eta > 0$, $\Gamma^D \neq \emptyset$, $\Gamma^R \neq \emptyset$, $\alpha = 0$,
8. $\eta = 0$, $\Gamma^D \neq \emptyset$, $\Gamma^R \neq \emptyset$, $\alpha > 0$,
9. $\eta > 0$, $\Gamma^D \neq \emptyset$, $\Gamma^R \neq \emptyset$, $\alpha > 0$,
10. $\ldots$

• Validation 1: $\eta = 0$, $\Gamma^R = \emptyset$.



$$
(1)\begin{cases}
\eta u - \Delta u = f, & \text{dans } \Omega \quad (1a)\\
u = g_D, & \text{sur } \Gamma^D \quad (1b)\\
\dfrac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g_R, & \text{sur } \Gamma^R \quad (1c)
\end{cases}
$$

$$\Gamma^D = \bigcup_{l \in [\![1,4]\!]} \Gamma_l \text{ et } \Omega = \Omega_1$$

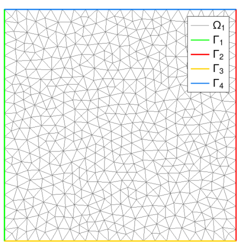
$$
(P_1)\begin{cases}
-\Delta u = f, & \text{dans } \Omega \quad (P_1.1)\\
u = g_D, & \text{sur } \Gamma^D \quad (P_1.2)
\end{cases}
$$

$f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, $g_D \in \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma^D)$,

$$
\begin{cases}
\text{Trouver } \ u \in \mathrm{H}^1_{g_D,\Gamma^D}(\Omega) \ \text{ tel que}\\
\mathcal{A}(u,v) = \mathcal{L}(v), \ \forall v \in \mathrm{H}^1_{0,\Gamma^D}(\Omega)
\end{cases} \quad (FV_1)
$$

avec $\mathcal{A}(u,v) = \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle dq$ et $\mathcal{L}(v) = \int_\Omega f.v dq$ ☞ Relèvement + Lax-Milgram $\Rightarrow$ OK

• Validation 1: $\eta = 0$, $\Gamma^R = \emptyset$.



$$
(P_1)\begin{cases}
-\Delta u = f, & \text{dans } \Omega = \Omega_1 \quad (P_1.1)\\
u = g_D, & \text{sur } \Gamma^D = \bigcup_{l \in [\![1,4]\!]} \Gamma_l \quad (P_1.2)
\end{cases}
$$

$$
\text{(F.V.H)} \Leftrightarrow \begin{cases}
\text{Trouver } \ u_h \in V_{g_D,\Gamma_h^D}(\Omega_h) \ \text{ tel que}\\
\mathcal{A}_h(u_h,\varphi_i) = \mathcal{L}_h(\varphi_i), \ \forall i \in \mathcal{I}_D^c
\end{cases}
$$

avec $\mathcal{A}_h(u,v) = \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle dq$ et $\mathcal{L}_h(v) = \int_\Omega f.v dq$

- Calcul de $\mathbb{A}^h \in \mathcal{M}_{n_q}(\mathbb{R})$, t.q. $\mathbb{A}^h_{i,j} = \mathcal{A}_h(\varphi_j, \varphi_i)$

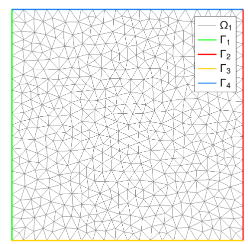
$$(3) \quad \mathbb{A}^h = \eta\mathbb{M}(\Omega_h) + \mathbb{K}(\Omega_h) + \alpha\mathbb{M}^G(\Gamma_h^R) \ \Rightarrow \ \mathbb{A}^h = \mathbb{K}(\Omega_h)$$

- Calcul de $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{n_q}$, t.q. $\boldsymbol{b}_i = \mathcal{L}_h(\varphi_i)$

$$(4) \quad \boldsymbol{b} \approx \sum_{l \in labs} \mathbb{M}^G(\Omega_l^h) * \boldsymbol{F}^l + \sum_{l \in Rlabs} \mathbb{M}^G(\Gamma_l^h) * \boldsymbol{G}^l \ \Rightarrow \ \boldsymbol{b} = \mathbb{M}(\Omega_h) * \boldsymbol{F}$$

avec $\mathbb{K}(\Omega_h)$ matrice de Rigidité, $\mathbb{M}(\Omega_h)$ matrice de Masse, $\boldsymbol{F} \in \mathbb{R}^{n_q}$ t.q. $\boldsymbol{F}_i = f(\mathrm{q}^i)$

• Validation 1: $\eta = 0$, $\Gamma^R = \emptyset$.



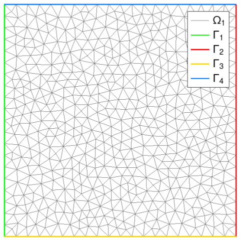
$$
(P_1)\begin{cases}
-\Delta u = f, & \text{dans } \Omega = \Omega_1 \quad (P_1.1)\\
u = g_D, & \text{sur } \Gamma^D = \bigcup_{l \in [\![1,4]\!]} \Gamma_l \quad (P_1.2)
\end{cases}
$$

On choisi la solution exacte $u(x,y) = \cos(\pi(x-y))$, ce qui impose $f(x,y) = 2\pi^2\cos(\pi(x-y))$ et $g_D(x,y) = \cos(\pi(x-y))$

Exo: Etudier les codes suivants

1. programme ep07.P1 résolvant (P_1).
2. programme ep07.ordreP1 permettant de représenter l'ordre de la méthode des éléments finis $\mathbb{P}_1$-Lagrange.
   Utilise la fonction ep07.solveP1...

- **Validation 2:** $\eta > 0$, $\Gamma^R = \emptyset$.



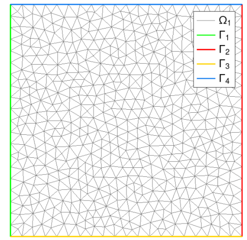
$$(P_2)\begin{cases} \eta u - \Delta u = f, & \text{dans } \Omega = \Omega_1 \quad (P_2.1)\\ u = g_D, & \text{sur } \Gamma^D = \bigcup_{l\in[\![1,4]\!]} \Gamma_l \quad (P_2.2)\end{cases}$$

On choisi la solution exacte $u(x,y) = \cos(\pi(x-y))$ et $\eta = 1/2$ ce qui impose
$f(x,y) = 2\pi^2\cos(\pi(x-y)) + \eta u(x,y)$ et
$g_D(x,y) = \cos(\pi(x-y))$

Exo: Ecrire les codes suivants

1. programme ep07.P2 résolvant (P_2)
2. programme ep07.ordreP2 permettant de représenter l'ordre de la méthode des éléments finis $\mathbb{P}_1$-Lagrange.

- **Validation 3:** $\eta > 0$, $\Gamma^D = \emptyset$, $\alpha = 0$.



$$(P_3)\begin{cases} \eta u - \Delta u = f, & \text{dans } \Omega = \Omega_1 \quad (P_3.1)\\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g_R, & \text{sur } \Gamma^R = \bigcup_{l\in[\![1,4]\!]} \Gamma_l \quad (P_3.2)\end{cases}$$

$$(\text{F.V.H}) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V(\Omega_h) \text{ tel que}\\ \mathcal{A}_h(u_h,\varphi_i) = \mathcal{L}_h(\varphi_i),\ \forall i \in [\![1, n_q]\!]\end{cases}$$

avec $\mathcal{A}_h(u,v) = \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v\rangle d\mathrm{q} + \eta\int_\Omega u.vd\mathrm{q}$ et

$\mathcal{L}_h(v) = \int_\Omega f.vd\mathrm{q} + + \int_{\Gamma_h^R} g_R.vd\sigma$

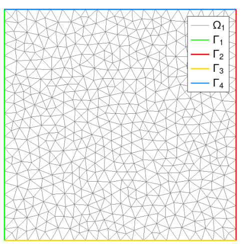
- Calcul de $\mathbb{A}^h \in \mathcal{M}_{n_q}(\mathbb{R})$, t.q. $\mathbb{A}^h_{i,j} = \mathcal{A}_h(\varphi_j,\varphi_i)$

$$(3) \quad \mathbb{A}^h = \eta\mathbb{M}(\Omega_h) + \mathbb{K}(\Omega_h) + \alpha\sum_{l\in Rlabs}\mathbb{M}^G(\Gamma_l^h) \Rightarrow \mathbb{A}^h = \eta\mathbb{M}(\Omega_h) + \mathbb{K}(\Omega_h)$$

- Calcul de $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{n_q}$, t.q. $\boldsymbol{b}_i = \mathcal{L}_h(\varphi_i)$

$$(4) \quad \boldsymbol{b} \approx \sum_{l\in labs}\mathbb{M}^G(\Omega_l^h) * \boldsymbol{F^l} + \sum_{l\in Rlabs}\mathbb{M}^G(\Gamma_l^h) * \boldsymbol{G^l} \Rightarrow \boldsymbol{b} = \mathbb{M}(\Omega_h) * \boldsymbol{F} + \sum_{l\in 1:4}\mathbb{M}^G(\Gamma_l^h) * \boldsymbol{G^l}$$

- **Validation 3:** $\eta > 0$, $\Gamma^D = \emptyset$, $\alpha = 0$.



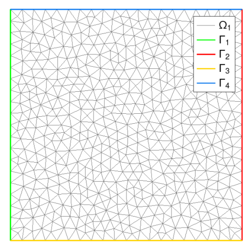
$$(P_3)\begin{cases} \eta u - \Delta u = f, & \text{dans } \Omega = \Omega_1 \quad (P_3.1)\\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g_R, & \text{sur } \Gamma^R = \bigcup_{l\in[\![1,4]\!]} \Gamma_l \quad (P_3.2)\end{cases}$$

On choisi la solution exacte $u(x,y) = \cos(\pi(x-y))$ et $\eta = 1/2$ ce qui impose
$f(x,y) = 2\pi^2\cos(\pi(x-y)) + \eta u(x,y)$ et ...

Exo: Ecrire les codes suivants

1. programme ep07.P3 résolvant (P_3)
2. programme ep07.ordreP3 permettant de représenter l'ordre de la méthode des éléments finis $\mathbb{P}_1$-Lagrange.

- **Validation 5:** $\eta > 0$, $\Gamma^D = \emptyset$, $\alpha > 0$.



$$(P_5)\begin{cases} \eta u - \Delta u = f, & \text{dans } \Omega = \Omega_1 \quad (P_5.1)\\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g_R, & \text{sur } \Gamma^R = \bigcup_{l\in[\![1,4]\!]} \Gamma_l \quad (P_5.2)\end{cases}$$

$$(\text{F.V.H}) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V(\Omega_h) \text{ tel que}\\ \mathcal{A}_h(u_h,\varphi_i) = \mathcal{L}_h(\varphi_i),\ \forall i \in [\![1, n_q]\!]\end{cases}$$

$\mathcal{A}_h(u,v) = \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v\rangle d\mathrm{q} + \eta\int_\Omega u.vd\mathrm{q} + \alpha\int_{\Gamma_h^R} u_h v_h d\sigma$

et $\mathcal{L}_h(v) = \int_\Omega f.vd\mathrm{q} + \int_{\Gamma_h^R} g_R.vd\sigma$

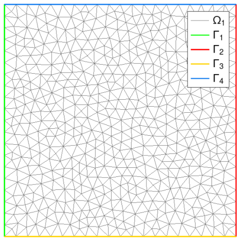
- Calcul de $\mathbb{A}^h \in \mathcal{M}_{n_q}(\mathbb{R})$, t.q. $\mathbb{A}^h_{i,j} = \mathcal{A}_h(\varphi_j,\varphi_i)$

$$(3) \Rightarrow \mathbb{A}^h = \eta\mathbb{M}(\Omega_h) + \mathbb{K}(\Omega_h) + \alpha\sum_{l\in 1:4}\mathbb{M}^G(\Gamma_l^h)$$

- Calcul de $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{n_q}$, t.q. $\boldsymbol{b}_i = \mathcal{L}_h(\varphi_i)$

$$(4) \Rightarrow \boldsymbol{b} \approx \mathbb{M}(\Omega_h) * \boldsymbol{F} + \sum_{l\in 1:4}\mathbb{M}^G(\Gamma_l^h) * \boldsymbol{G^l}$$

- **Validation 5:** $\eta > 0$, $\Gamma^D = \emptyset$, $\alpha > 0$.



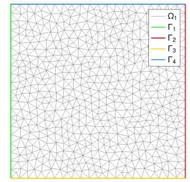
$$(P_5)\begin{cases} \eta u - \Delta u = f, & \text{dans } \Omega = \Omega_1 & (P_5.1)\\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g_R, & \text{sur } \Gamma^R = \displaystyle\bigcup_{l\in[\![1,4]\!]} \Gamma_l & (P_5.2)\end{cases}$$

On choisi la solution exacte $u(x,y) = \cos(\pi(x-y))$, $\eta = 1/2$, $alpha = 1/3$ ce qui impose $f(x,y) = 2\pi^2\cos(\pi(x-y)) + \eta u(x,y)$ et ...

Exo: Ecrire les codes suivants

1. programme ep07.P5 résolvant (P_5)
2. programme ep07.ordreP5 permettant de représenter l'ordre de la méthode des éléments finis $\mathbb{P}_1$-Lagrange.

- **Validation 6:** $\eta = 0$, $\Gamma^D \neq \emptyset$, $\Gamma^R \neq \emptyset$, $\alpha = 0$.



$$(P_6)\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{dans } \Omega = \Omega_1 & (P_6.1)\\ u = g_D, & \text{sur } \Gamma^D = \displaystyle\bigcup_{l\in[1,2]} \Gamma_l & (P_6.2)\\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g_R, & \text{sur } \Gamma^R = \displaystyle\bigcup_{l\in[3,4]} \Gamma_l & (P_6.3)\end{cases}$$

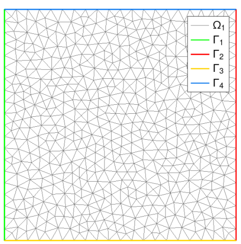
$$(\text{F.V.H}) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Trouver } \; u_h \in V_{g_D,\Gamma_h^D}(\Omega_h) \; \text{ tel que}\\ \mathcal{A}_h(u_h,\varphi_i) = \mathcal{L}_h(\varphi_i), \; \forall i \in \mathcal{I}_D^c\end{cases}$$

$$\mathcal{A}_h(u,v) = \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v\rangle d\mathrm{q} \text{ et } \mathcal{L}_h(v) = \int_\Omega f.vd\mathrm{q} + \int_{\Gamma_h^R} g_R.vd\sigma$$

- Calcul de $\mathbb{A}^h \in \mathcal{M}_{n_\mathrm{q}}(\mathbb{R})$, t.q. $\mathbb{A}^h_{i,j} = \mathcal{A}_h(\varphi_j,\varphi_i)$, (3) $\Rightarrow$ $\mathbb{A}^h = \mathbb{K}(\Omega_h)$
- Calcul de $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{n_\mathrm{q}}$, t.q. $\boldsymbol{b}_i = \mathcal{L}_h(\varphi_i)$

$$(4) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{b} \approx \mathbb{M}(\Omega_h) * \boldsymbol{F} + \sum_{l\in[3,4]} \mathbb{M}^G(\Gamma_l^h) * \boldsymbol{G}^l$$

- **Validation 6:** $\eta = 0$, $\Gamma^D \neq \emptyset$, $\Gamma^R \neq \emptyset$, $\alpha = 0$.



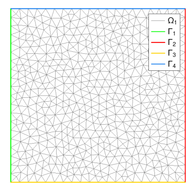
$$(P_6)\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{dans } \Omega = \Omega_1 & (P_6.1)\\ u = g_D, & \text{sur } \Gamma^D = \displaystyle\bigcup_{l\in[1,2]} \Gamma_l & (P_6.2)\\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g_R, & \text{sur } \Gamma^R = \displaystyle\bigcup_{l\in[3,4]} \Gamma_l & (P_6.3)\end{cases}$$

On choisi la solution exacte $u(x,y) = \cos(\pi(x-y))$ ce qui impose ...

Exo: Ecrire les codes suivants

1. programme ep07.P6 résolvant (P_6)
2. programme ep07.ordreP6 permettant de représenter l'ordre de la méthode des éléments finis $\mathbb{P}_1$-Lagrange.

- **Validation 9:** $\eta > 0$, $\Gamma^D \neq \emptyset$, $\Gamma^R \neq \emptyset$, $\alpha > 0$.



$$(P_9)\begin{cases} \eta u - \Delta u = f, & \text{dans } \Omega = \Omega_1 & (P_9.1)\\ u = g_D, & \text{sur } \Gamma^D = \displaystyle\bigcup_{l\in[1,2]} \Gamma_l & (P_9.2)\\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g_R, & \text{sur } \Gamma^R = \displaystyle\bigcup_{l\in[3,4]} \Gamma_l & (P_9.3)\end{cases}$$

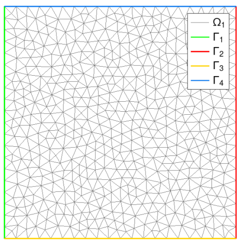
$$(\text{F.V.H}) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Trouver } \; u_h \in V_{g_D,\Gamma_h^D}(\Omega_h) \; \text{ tel que}\\ \mathcal{A}_h(u_h,\varphi_i) = \mathcal{L}_h(\varphi_i), \; \forall i \in \mathcal{I}_D^c\end{cases}$$

$$\mathcal{A}_h(u,v) = \eta\int_\Omega u.vd\mathrm{q} + \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v\rangle d\mathrm{q} + \alpha\int_{\Gamma_h^R} u.vd\sigma \text{ et } \mathcal{L}_h(v) = \int_\Omega f.vd\mathrm{q} + \int_{\Gamma_h^R} g_R.vd\sigma$$

- Calcul de $\mathbb{A}^h \in \mathcal{M}_{n_\mathrm{q}}(\mathbb{R})$, t.q. $\mathbb{A}^h_{i,j} = \mathcal{A}_h(\varphi_j,\varphi_i)$, (3) $\Rightarrow$ $\mathbb{A}^h = \eta\mathbb{M}(\Omega_h) + \mathbb{K}(\Omega_h) + \alpha\sum_{l\in[3,4]}\mathbb{M}^G(\Gamma_l^h)$
- Calcul de $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{n_\mathrm{q}}$, t.q. $\boldsymbol{b}_i = \mathcal{L}_h(\varphi_i)$

$$(4) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{b} \approx \mathbb{M}(\Omega_h) * \boldsymbol{F} + \sum_{l\in[3,4]} \mathbb{M}^G(\Gamma_l^h) * \boldsymbol{G}^l$$

- **Validation 9:** $\eta > 0$, $\Gamma^D \neq \emptyset$, $\Gamma^R \neq \emptyset$, $\alpha > 0$.



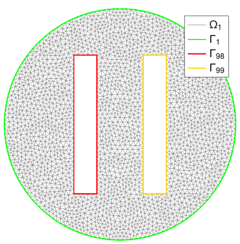
$$(P_9)\begin{cases} \eta u - \Delta u = f, & \text{dans } \Omega = \Omega_1 \quad (P_9.1)\\ u = g_D, & \text{sur } \Gamma^D = \bigcup_{l\in[1,2]} \Gamma_l \quad (P_9.2)\\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g_R, & \text{sur } \Gamma^R = \bigcup_{l\in[3,4]} \Gamma_l \quad (P_9.3)\end{cases}$$

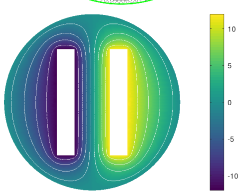
On choisi la solution exacte $u(x,y) = \cos(\pi(x-y))$ ...

Exo: Ecrire les codes suivants

1. programme ep07.P6 résolvant (P_6)
2. programme ep07.ordreP6 permettant de représenter l'ordre de la méthode des éléments finis $\mathbb{P}_1$-Lagrange.

Plan



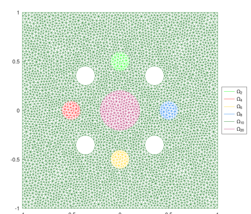


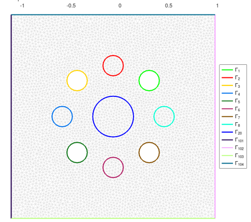
$$(A_1)\begin{cases} -\Delta u = 0, & \text{dans } \Omega = \Omega_1 \quad (A_1.1)\\ u = g_D, & \text{sur } \Gamma^D = \Gamma_1 \cup \Gamma_{98} \cup \Gamma_{99} \quad (A_1.2)\end{cases}$$

avec $g_D = 0$, sur Γ_1, $g_D = -12$, sur Γ_{98} et $g_D = +12$, sur Γ_{99}.

```
meshfile=fc_oogmsh.gmsh.buildmesh2d('condenser',N)
Th=fc_simesh.siMesh(meshfile);
```

Exo: Ecrire un programme ep07.A1 résolvant (A_1).



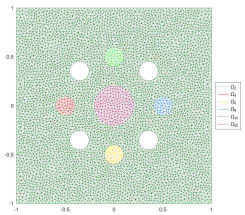


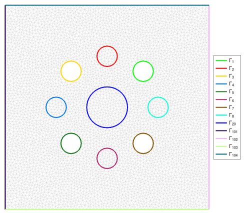
$$(A_2)\begin{cases} -\Delta u = 0, & \text{dans } \Omega \quad (A_2.1)\\ u = g_D, & \text{sur } \Gamma^D = \partial\Omega \quad (A_2.2)\end{cases}$$

avec $g_D = +12$, sur $\Gamma_{[1,3]}$, $g_D = -12$, sur $\Gamma_{[5,7]}$ et $g_D = 0$, sur $\Gamma_{101:104}$.

```
meshfile=fc_oogmsh.gmsh.buildmesh2d('condenser11',N);
Th=fc_simesh.siMesh(meshfile);
```

Exo: Ecrire un programme ep07.A2 résolvant (A_2).





$$
(A_3)\begin{cases}
-\Delta u = 0, & \text{dans } \Omega \quad (A_3.1)\\
u = g_D, & \text{sur } \Gamma^D = \displaystyle\bigcup_{l\in[1,3,5,7]} \Gamma_l \quad (A_3.2)\\
\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0, & \text{sur } \Gamma^R = \displaystyle\bigcup_{l\in[101:104]} \Gamma_l \quad (A_3.3)
\end{cases}
$$

avec $g_D = +12$, sur $\Gamma_{[1,3]}$, $g_D = -12$, sur $\Gamma_{[5,7]}$. et $g_R = 0$, sur $\Gamma_{101:104}$.

```
meshfile=fc_oogmsh.gmsh.buildmesh2d('condenser11',N);
Th=fc_simesh.siMesh(meshfile);
```

Exo: Ecrire un programme ep07.A3 résolvant (A_3).