MACS2 **TPs FEM**
Sup'Galilée **2023-2034**

Rattrapage du 13 juin 2024

- Les fonctions et programmes demandés devront être envoyés par mail, sous forme d'une archive compressée, à `cuvelier@math.univ-paris13.fr` au plus tard 5mn après la fin de l'épreuve et dans tous les cas avant de quitter définitivement la salle.
- Aucune communication autorisée lors de l'épreuve sauf avec l'enseignant présent.
- Aucun échange/envoi de documents/codes autorisé entre étudiants.
- Le barême est donné à titre indicatif.

EXERCICE 1 (15 points)

Soit $E \subset \mathbb{R}^2$, un domaine borné suffisament régulier, maillé par $E_h = \bigcup_{k=1}^{n_{\mathrm{me}}} T_k$, un maillage élémentaire conforme composé des triangles T_k. On note

- $\mathrm{q} = E_h.\mathrm{q}$, `size` $= (2, n_{\mathrm{q}})$; $\mathrm{me} = E_h.\mathrm{me}$, `size` $= (3, n_{\mathrm{me}})$; $\mathrm{toGlobal} = E_h.\mathrm{toGlobal}$, `size` $= (1, n_{\mathrm{q}})$
  $\to$ avec $n_{\mathrm{q}} = E_h.n_{\mathrm{q}}$, $n_{\mathrm{me}} = E_h.n_{\mathrm{me}}$, $\cdots$
- $V(E_h)$, l'espace usuel des éléments finis $\mathbb{P}_1$-Lagrange sur E_h :

$$\begin{aligned} V(E_h) &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ v \in \mathcal{C}^0(E_h;\mathbb{R}) \text{ tq } \forall k \in [\![1, n_{\mathrm{me}}]\!],\ v_{|T_k} \in \mathbb{R}_1[X_1, X_2] \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left\{ \varphi_1, \cdots, \varphi_{n_{\mathrm{q}}} \right\} \end{aligned}$$

- Opérateur d'interpolation :

$$\left\{ \begin{array}{lllll} \pi_h & : & V(E) & \longrightarrow & V(E_h) \\ & & u & \longmapsto & \pi_h(u) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n_{\mathrm{q}}} u(q^i)\varphi_i \end{array} \right.$$

  On pourra prendre $V(E) = \mathrm{H}^1(E)$, par ex.

Soit $w \in V(E)$ **fixée et non nulle**. On souhaite calculer numériquement

$$\mathcal{I}_w(u, v) = \int_E w(q) \left\langle \nabla u(q), \nabla v(q) \right\rangle dq, \quad \forall (u, v) \in V(E)^2,$$

où $\langle \bullet, \bullet \rangle$ est le produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^2$. Pour cela, on approche $\mathcal{I}_w(u, v)$ par

$$\mathcal{I}^h_{w_h}(u_h, v_h) = \int_{E_h} w_h(q) \left\langle \nabla u_h(q), \nabla v_h(q) \right\rangle dq$$

où $w_h = \pi_h(w)$, $u_h = \pi_h(u)$ et $v_h = \pi_h(v)$.

> **Q. 1 [papier]** *Montrer que $\mathcal{I}^h_{w_h}(u_h, v_h)$ est égale au produit scalaire $\langle \mathbb{K}^h(w_h)\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V} \rangle$ où l'on explicitera les vecteurs $\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{V}$, ainsi que la matrice $\mathbb{K}^h(w_h)$ sachant qu'elle est indépendante de u_h et v_h.* □

Soit $T \subset \mathbb{R}^2$ un triangle non dégénéré de sommets $\{q^0, q^1, q^2\}$ et $(\lambda_i(q))_{i=0}^2$ ses coordonnées barycentriques.

Q. 2 *a.* **[papier]** *Expliquer comment calculer l'aire du triangle T.*

b. **[code]** *Ecrire une fonction Matlab/Octave, nommée* `Aire`*, permettant de calculer l'aire du triangle T en utilisant uniquement des fonctions usuelles de Matlab/Octave.* [1]

□

.

Q. 3 *a.* **[papier]** *Soit $q \in T$. Expliquer comment calculer les gradients des fonctions $(\lambda_i(q))_{i=0}^2$ sur le triangle T.*

b. **[code]** *Ecrire une fonction Matlab/Octave, nommée* `gradT`*, permettant de retourner les gradients des fonctions $(\lambda_i(q))_{i=0}^2$ en utilisant uniquement des fonctions usuelles de Matlab/Octave.*

□

Q. 4 **[papier]** *Soient $(\widetilde{w}_i)_{i=0}^2$, trois réels. On note $\widetilde{w}(q) = \sum_{i=0}^2 \widetilde{w}_i \lambda_i(q)$, $\forall q \in T$. On définit la matrice $\mathbb{K}^e(\widetilde{w}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par*

$$\left(\mathbb{K}^e(\widetilde{w})\right)_{i+1,j+1} = \int_T \widetilde{w}(q) \left\langle \nabla \lambda_j(q), \nabla \lambda_i(q) \right\rangle dq, \quad \forall (i,j) \in [\![0,2]\!].$$

Calculer explicitement cette matrice en fonction du triangle T, des gradients de ses coordonnées barycentriques et de $(\widetilde{w}_i)_{i=0}^2$. □

Q. 5 *a.* **[papier]** *Soit $k \in [\![1, n_{\mathrm{me}}]\!]$. Quel est le lien entre les fonctions $(\varphi_i)_{i=1}^{n_q}$ (fonctions de base $\mathbb{P}_1$-Lagrange) et les coordonnées barycentriques du triangle T_k.*

b. **[code]** *Ecrire une fonction Matlab/Octave, nommée* `AssembleKW`*, permettant de calculer la matrice $\mathbb{K}^h(w_h)$ définie en* ***Q.1****.*

□

Q. 6 **[papier]** *Sans programmation, décrire précisément quelques exemples permettant de tester/valider la fonction* `AssembleKW`*. Si des calculs analytiques d'intégrales non triviales sont nécessaires, on les supposera faits et connus.*

⚠ *la pertinence des exemples est prise en compte dans la notation.* □

On souhaite déterminer numériquement l'ordre de cette approximation, c'est à dire trouver p tel que

$$\left|\mathcal{I}_w(u,v) - \mathcal{I}_{w_h}^h(u_h, v_h)\right| \leq C h^p$$

avec h longueur caractéristique du maillage E_h que l'on prendra comme étant la longueur de la plus grande des arêtes des triangles du maillage.

Q. 7 **[code]**

a. *Ecrire une fonction Matlab/Octave, nommée* `max_length_edges`*, retournant la longueur de la plus grande des arêtes des triangles du maillage élémentaire E_h calculée en utilisant uniquement des fonctions usuelles de Matlab/Octave.*

---

1. sans utiliser de fonctions fournies lors du cours

b. Le fichier de géométrie `square4.geo` *permettant de mailler le carré unité est fourni. Les commandes permettant d'obtenir le maillage associé* Th *(*siMesh *object) sont :*

```
N=30;
meshfile=fc_oogmsh.gmsh.buildmesh2d('square4',N);
Th=fc_simesh.siMesh(meshfile);
```

Listing 1 – Commandes permettant d'obtenir un objet siMesh correspondant à un maillage obtenu à partir du fichier de géométrie `square4.geo`. Voir Figure 1 et Listing 2 pour plus de détails.

On rappelle que plus N *est grand, plus le nombre de triangles est élevé. En choisissant* $u(x,y) = \sin(2\pi x + \pi y)$, $v(x,y) = \sin(3\pi x - 2\pi y)$ *et* $w(x,y) = x^2 + y^2$, *on a, sur le carré unité,* $\mathcal{I}_w(u,v) = \frac{64(225\pi^2-488)}{3375\pi^2}$.
Ecrire un programme Ordre *permettant de* ***calculer numériquement*** *la valeur de* p *(aucun graphisme).*

□

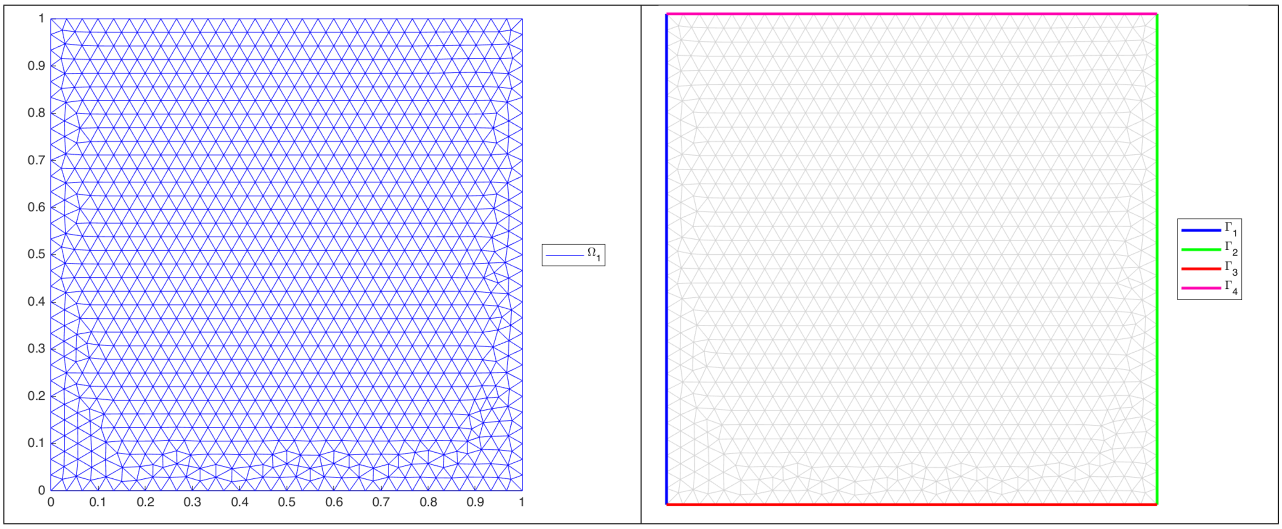

FIGURE 1 – Maillage obtenu à partir du fichier `square4.geo` avec N=30, à gauche le maillage élementaire Ω_1 composé de triangles et à droite, les 4 maillages élémentaires composés de segments (Γ_1 : gauche, Γ_2 : droit, Γ_3 : bas, et Γ_4 : haut)

```
>> disp(Th)
  fc_simesh.siMesh with properties:
                 d: 2 double
               dim: 2 double
               sTh: (1x9 cell)
              nsTh: 9 double
          toGlobal: (1x1125 double)
          toParent: (1x1125 double)
           sThsimp: [ 2 1 1 1 1 0 0 0 0 ] (1x9 double)
            sThlab: [ 1 1 2 3 4 101 102 103 104 ] (1x9 double)
         sThcolors: (9x3 double)
              bbox: [ 0 1 0 1 ] (1x4 double)
         sThgeolab: []
```

```
sThphyslab: [ 1 1 2 3 4 101 102 103 104 ] (1x9 double)
sThpartlabs: []
sThboundlabs: []
sThPhysicalTags: []
nq: 1125 double
nqParents: 1125 double
toParents: (1x1 cell)
other: (1x1 struct)
```

Listing 2 – Affichage de Th

EXERCICE 2 (5 points)

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ le domaine donné par le fichier de géométrie `dom20OC.geo` fourni.
On souhaire résoudre l'E.D.P. suivante :

$$-\Delta u + cu = f \qquad \text{dans } \Omega \tag{1}$$

$$u = g_D \qquad \text{sur } \Gamma_D \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_N \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g_R \qquad \text{sur } \Gamma_R \tag{4}$$

où $\Gamma_D = \Gamma_{[11:14]}$, $\Gamma_R = \Gamma_1$ et $\Gamma_N = \Gamma_{100}$. Les données de cette E.D.P. sont $c \in \mathbb{R}^+$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $g_D : \Gamma_D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g_R : \Gamma_R \longrightarrow \mathbb{R}$.
Dans ce problème aucune solution exacte ne sera demandée ou utilisée.
On prendra comme données :

- $f(x,y) = 30\exp(-5((x-1)^2 + (y-1)^2)) - 30\exp(-5((x+1)^2 + (y+1)^2))$,
- $c = 1$,
- $g_D = 12$ sur $\Gamma_{[11,13]}$ et $g_D = -12$ sur $\Gamma_{[12,14]}$
- $\alpha = 1/3$ et $g_R = -1$.

Q. 1 [code] *Ecrire un programme, fichier* ***prog.m****, permettant de résoudre numériquement ce problème par la méthode des éléments finis $\mathbb{P}_1$-Lagrange puis de représenter la solution numérique obtenue. Il faudra, dans ce programme, que les données c, f, g_D, α et g_R puissent facilement être modifiées.* □