

TRAVAUX PRATIQUES - MÉTHODES DES DIFFÉRENCES FINIES ¹

TP 3

Différences finies pour les EDP 1D stationnaires

Table des matières

1	Approximation de dérivées premières	1
2	Approximation de dérivées secondes	2
3	E.D.P. modèle Dirichlet/Dirichlet	4
4	E.D.P. modèle Neumann/Dirichlet	6
4.1	Neumann ordre 1	7
4.2	Neumann ordre 2	7
5	E.D.P. modèle Dirichlet/Robin	7
5.1	Robin ordre 1	7
5.2	Robin ordre 2	8
6	E.D.P. avec conditions aux limites génériques	8
7	Début de généralisation et valeurs propres	8

1 Approximation de dérivées premières

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a, b]$ et suffisamment régulière.

Q. 1 Montrer que l'on a

$$f'(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x})}{h} + \mathcal{O}(h) \tag{1.1}$$

$$f'(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x}) - f(\bar{x} - h)}{h} + \mathcal{O}(h) \tag{1.2}$$

□

Q. 2 On note $x_i = a + ih$, $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$. Soit une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ suffisamment régulière. On suppose que les y_i sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \tag{1.3}$$

1. version du 7 octobre 2023 à 05:37

Écrire une fonction *Derive1* permettant de calculer des approximations d'ordre 1 de $f'(x_i)$ pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. \square

Pour obtenir une formule d'approximation d'ordre 2 de $f'(\bar{x})$, on suppose $f \in \mathcal{C}^3(]a, b[)$ et on peut alors développer les formules de Taylor de $f(\bar{x} + h)$ et $f(\bar{x} - h)$ jusqu'au troisième ordre. On obtient alors

$$f'(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x} - h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2). \quad (1.4)$$

- Cette approximation est la formule des **différences finies centrées**.
- Cette approximation est d'ordre 2.

Q. 3 Montrer que l'on a les deux formules suivantes

$$f'(\bar{x}) = -\frac{f(\bar{x} + 2h) - 4f(\bar{x} + h) + 3f(\bar{x})}{2h} + \mathcal{O}(h^2), \quad (1.5)$$

$$f'(\bar{x}) = \frac{3f(\bar{x}) - 4f(\bar{x} - h) + f(\bar{x} - 2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2). \quad (1.6)$$

\square

Q. 4 On note $x_i = a + ih$, $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$. Soit une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ suffisamment régulière. On suppose que les y_i sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (1.7)$$

Écrire une fonction *Derive2* permettant de calculer des approximations d'ordre 2 de $f'(x_i)$ pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. \square

Q. 5 Écrire un programme, nommé *ordreDerive*, permettant de vérifier graphiquement, pour chacune des 2 fonctions précédentes, l'ordre des erreurs. voir figure 1. \square

2 Approximation de dérivées secondes

L'objectif ici est déterminer une approximation d'ordre 2 de la dérivée seconde d'une fonction f (suffisamment régulière) en les points d'une discrétisation régulière $x_i = a + ih$, $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, de l'intervalle $[a, b]$.

Q. 6 a) Montrer que l'on a la formule suivante utilisant deux points de part et d'autres de \bar{x} :

$$f^{(2)}(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x} + h) - 2f(\bar{x}) + f(\bar{x} - h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \quad (2.1)$$

b) On va établir une formule n'utilisant que des points après \bar{x} . Pour cela montrer que

$$h^2 f^{(2)}(\bar{x}) = f(\bar{x}) - 2f(\bar{x} + h) + f(\bar{x} + 2h) - h^3 f^{(3)}(\bar{x}) + \mathcal{O}(h^4), \quad (2.2)$$

$$3h^2 f^{(2)}(\bar{x}) = 2f(\bar{x}) - 3f(\bar{x} + h) + f(\bar{x} + 3h) - 4h^3 f^{(3)}(\bar{x}) + \mathcal{O}(h^4). \quad (2.3)$$

Puis en déduire

$$f^{(2)}(\bar{x}) = \frac{2f(\bar{x}) - 5f(\bar{x} + h) + 4f(\bar{x} + 2h) - f(\bar{x} + 3h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2). \quad (2.4)$$

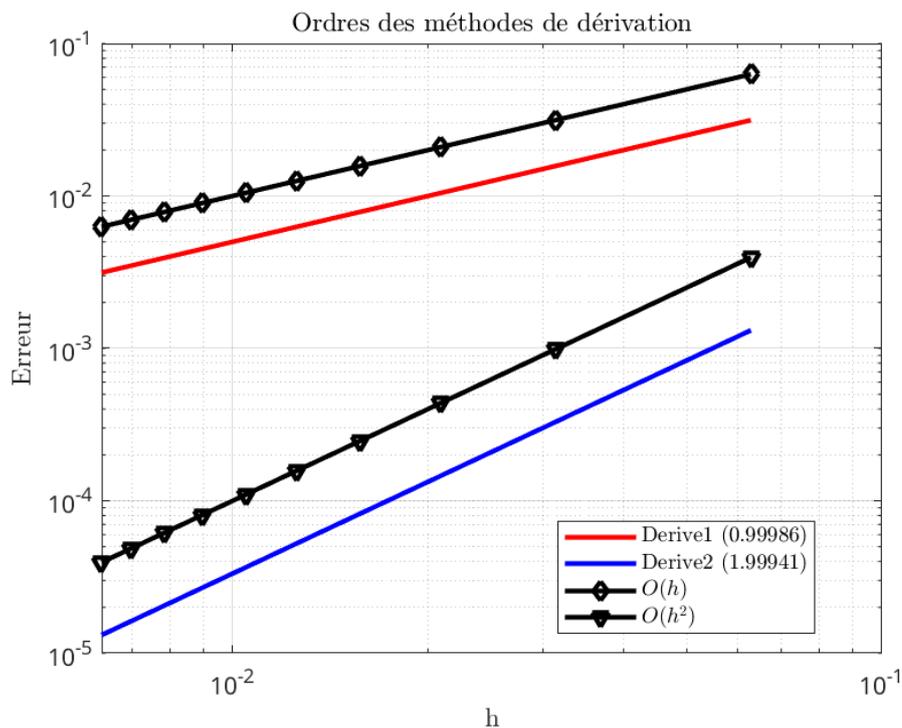


FIGURE 1 – Ordre de l'erreur des méthodes de dérivation

c) Etablir la formule suivante n'utilisant que des points avant \bar{x} :

$$f^{(2)}(\bar{x}) = \frac{2f(\bar{x}) - 5f(\bar{x} - h) + 4f(\bar{x} - 2h) - f(\bar{x} - 3h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2). \quad (2.5)$$

□

Q. 7 Ecrire une fonction `DeriveSec2` permettant de calculer des approximations d'ordre 2 de $f^{(2)}(x_i)$ pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. □

Q. 8 Ecrire un programme, nommé `ordreDeriveSeconde`, permettant de vérifier/retrouver graphiquement, l'ordre de la méthode d'approximation précédente. voir figure 2. □

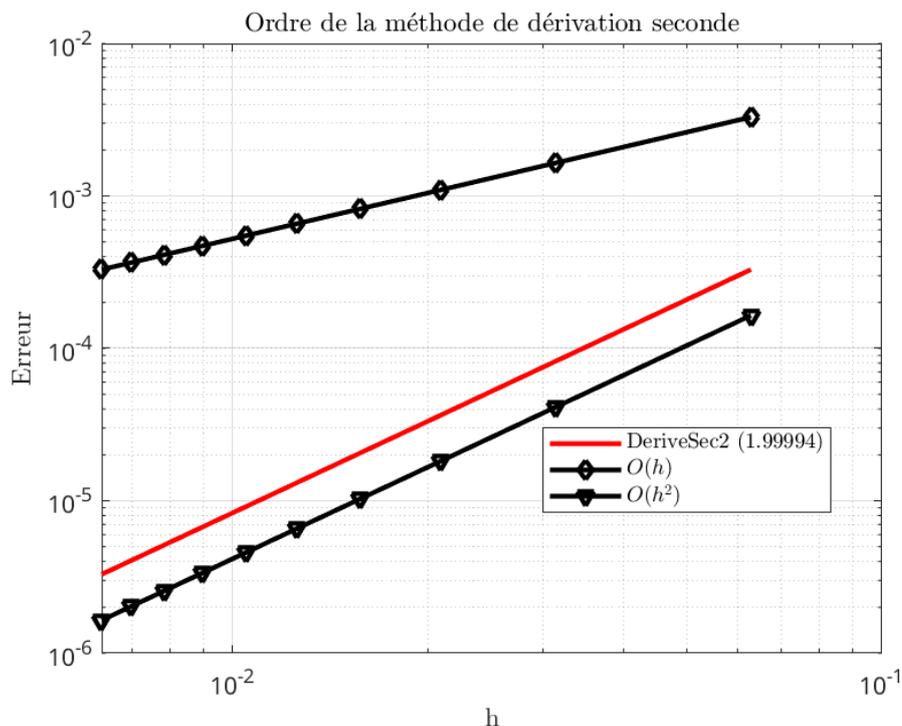


FIGURE 2 – Ordre de l’erreur lors de l’approximation de la dérivée seconde

3 E.D.P. modèle Dirichlet/Dirichlet

On souhaite résoudre par un schéma de type différences finies le problème suivant

$$-u''(x) = f(x), \forall x \in]a; b[\tag{3.1}$$

$$u(a) = u_a \in \mathbb{R} \tag{3.2}$$

$$u(b) = u_b \in \mathbb{R} \tag{3.3}$$

On peut prendre comme jeux de données $a = -\frac{2}{3}\pi$, $b = \frac{3}{2}$, $f(x) = 4 \cos(2x) - 9 \sin(-3x + 1)$, $u_a = -\sin(1) - \frac{1}{2}$ et $u_b = \cos(3) + \sin(\frac{7}{2})$. Dans ce cas la solution exacte est $u(x) = \cos(2x) - \sin(-3x + 1)$.

On définit la matrice associée au laplacien (en 1D opérateur dérivée seconde) discrétisé à l’ordre 2 par $\mathbb{K} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ avec

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

- Q. 9** a) Ecrire une fonction `Lap1D` (fichier `Lap1D.m`) permettant de générer cette matrice.
 b) Proposer plusieurs méthodes pour tester/valider cette fonction et les implémenter dans une fonction `validLap1D` ayant (au moins) comme argument la dimension de la matrice.

□

On note $\mathbf{x} = (x_i)_{i=0}^N$ une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$.

Q. 10 Montrer qu'un schéma aux différences finies pour la résolution du problème (3.1)-(3.2)-(3.3) s'écrit sous la la forme matricielle

$$\left(\begin{array}{c|ccccccc|c} h^2 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \hline -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ \hline 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & h^2 \end{array} \right) \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} u_a \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ f(x_{N-2}) \\ f(x_{N-1}) \\ u_b \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

où $u_i \approx u(x_i)$, $\forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket$. □

On admettra que ce schéma est (au moins) d'ordre 2 (voir cours de Mme Darbas) :

$$\max_{i \in \llbracket 0, N \rrbracket} |u(x_i) - u_i| = \mathcal{O}(h^2). \quad (3.5)$$

Q. 11 Ecrire un programme *EDP0* (fichier EDP0.m) permettant de résoudre numériquement le problème (3.1)-(3.2)-(3.3) par un schéma différences finies d'ordre 2. Ce programme représentera graphiquement la solution numérique obtenue, la solution exacte et l'erreur. □

Q. 12 Ecrire le programme *OrdreEDP0* (fichier OrdreEDP0.m) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas h de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode. Un exemple de représentation est donné en Figure 3. □

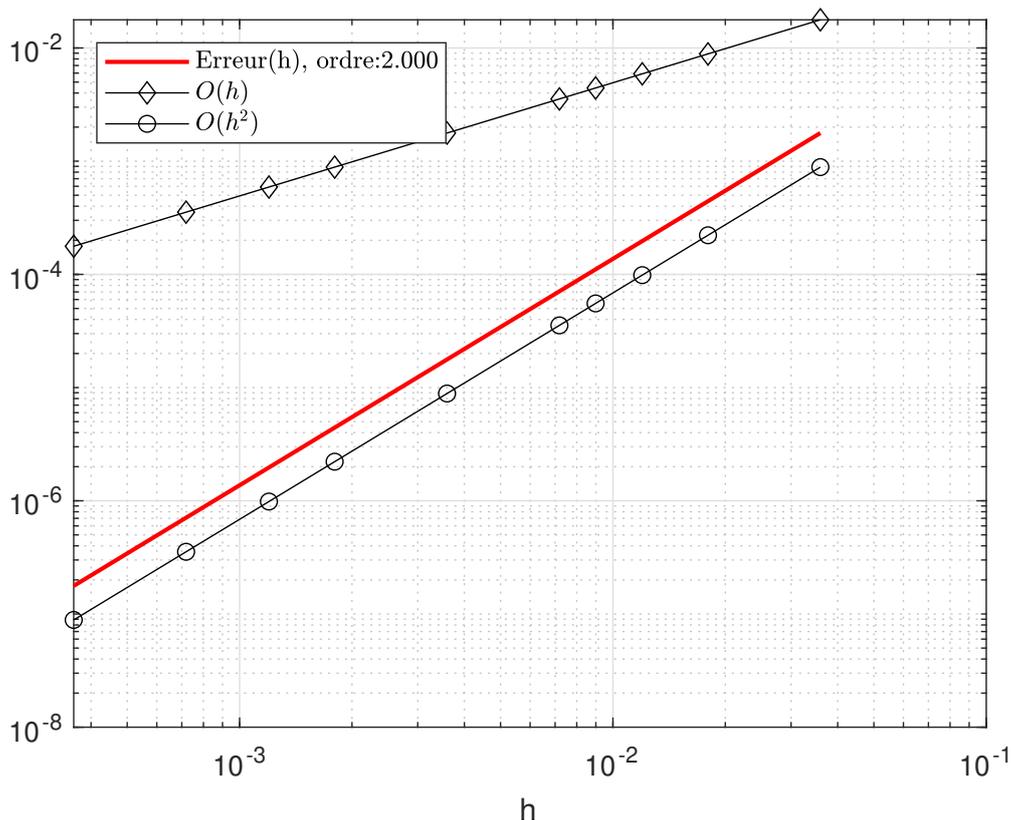


FIGURE 3 – Ordre du schéma utilisé dans [EDP0](#)

Q. 13 a) *Ecrire le programme [EDP1](#) (fichier EDP1.m) permettant de calculer une solution approchée de :*

$$-u''(x) + \nu u(x) = f(x), \quad \forall x \in]a; b[\quad (3.6)$$

$$u(a) = u_a \in \mathbb{R} \quad (3.7)$$

$$u(b) = u_b \in \mathbb{R} \quad (3.8)$$

avec $\nu \geq 0$. Avec un choix judicieux de données, ce programme représentera graphiquement la solution numérique obtenue, la solution exacte et l'erreur.

b) *Ecrire le programme [OrdreEDP1](#) (fichier OrdreEDP1.m) permettant de représenter, en échelle logarithmique, l'erreur en fonction du pas h de discrétisation et d'afficher l'ordre de la méthode. Le jeu de données sera choisi judicieusement.*

□

4 E.D.P. modèle Neumann/Dirichlet

On cherche à résoudre par un schéma de type différences finies le problème suivant

$$-u''(x) = f(x), \quad \forall x \in]a; b[\quad (4.1)$$

$$u'(a) = v_a \in \mathbb{R} \quad (4.2)$$

$$u(b) = u_b \in \mathbb{R} \quad (4.3)$$

On peut prendre comme jeu de données $a = -\frac{1}{4}\pi$, $b = \frac{1}{3}\pi$, $f(x) = \sin(x) - 2$, $v_a = -\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{2}$ et $u_b = \frac{1}{9}\pi^2 + \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Dans ce cas la solution exacte est $u(x) = x^2 + \sin(x)$.

4.1 Neumann ordre 1

Dans la condition aux limites de Neumann (4.2), on va approcher $u'(a)$ à l'ordre 1 par

$$\frac{u(a+h) - u(a)}{h}.$$

Q. 14 *Ecrire le programme `EDP2` (fichier EDP2.m) permettant de représenter une solution approchée du problème précédent. Avec un choix judicieux de données, ce programme représentera graphiquement la solution numérique obtenue, la solution exacte et l'erreur.* \square

Q. 15 *Ecrire le programme `OrdreEDP2` (fichier OrdreEDP2.m) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas h de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode.* \square

4.2 Neumann ordre 2

Dans la condition aux limites de Neumann (4.2), on va approcher $u'(a)$ à l'ordre 2 par

$$\frac{-u(a+2h) + 4u(a+h) - 3u(a)}{2h}.$$

Q. 16 *Ecrire le programme `EDP3` (fichier EDP3.m) permettant de représenter une solution approchée du problème précédent. Avec un choix judicieux de données, ce programme représentera graphiquement la solution numérique obtenue, la solution exacte et l'erreur.* \square

Q. 17 *Ecrire le programme `OrdreEDP3` (fichier OrdreEDP3.m) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas h de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode.* \square

5 E.D.P. modèle Dirichlet/Robin

On cherche à résoudre par un schéma de type différences finies le problème suivant

$$-u''(x) = f(x), \quad \forall x \in]a; b[\tag{5.1}$$

$$u(a) = g_a \in \mathbb{R} \tag{5.2}$$

$$u(b) + \mu u'(b) = g_b \in \mathbb{R} \tag{5.3}$$

On choisira un jeu de données de manière à avoir une solution exacte non triviale.

5.1 Robin ordre 1

Dans la condition aux limites de Robin (5.2), on va approcher $u'(b)$ à l'ordre 1 par $\frac{u(b) - u(b-h)}{h}$

Q. 18 *Ecrire le programme `EDP4` (fichier EDP4.m) permettant de représenter une solution approchée du problème précédent. Avec un choix judicieux de données, ce programme représentera graphiquement la solution numérique obtenue, la solution exacte et l'erreur.* \square

Q. 19 *Ecrire le programme `OrdreEDP4` (fichier OrdreEDP4.m) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas h de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode.* \square

5.2 Robin ordre 2

Q. 20 a) Dans la condition aux limites de Robin (5.2), déterminer comment approcher $u'(b)$ à l'ordre 2.

b) Ecrire le programme *EDP5* (fichier EDP5.m) permettant de représenter une solution approchée du problème précédent. Avec un choix judicieux de données, ce programme représentera graphiquement la solution numérique obtenue, la solution exacte et l'erreur. \square

Q. 21 Ecrire le programme *OrdreEDP5* (fichier OrdreEDP5.m) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas h de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode. \square

6 E.D.P. avec conditions aux limites génériques

On cherche à résoudre par un schéma de type différences finies le problème suivant

$$-u''(x) = f(x), \quad \forall x \in]a; b[\quad (6.1)$$

$$\delta_a u(a) + \mu_a u'(a) = v_a \in \mathbb{R} \quad (6.2)$$

$$\delta_b u(b) + \mu_b u'(b) = v_b \in \mathbb{R} \quad (6.3)$$

où δ_a et δ_b sont donnés dans $\{0, 1\}$ et μ_a et μ_b sont deux réels donnés.

Q. 22 a) Donner un jeu de valeurs δ_a , δ_b , μ_a , μ_b , pour lesquelles il n'y a pas trivialement unicité de la solution de (6.1),(6.2),(6.3).

b) Ecrire une discrétisation à l'ordre 2 de chacune des conditions aux limites.

c) Pour chacune des conditions écrire une fonction permettant de la prendre en compte dans le système linéaire.

d) Ecrire le programme *EDP6* (fichier EDP6.m) permettant de représenter une solution approchée du problème précédent. Que se passe-t'il lorsqu'il n'y a pas unicité de la solution (théorique) ?

e) Ecrire le programme *OrdreEDP6* (fichier OrdreEDP6.m) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas h de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode. \square

7 Début de généralisation et valeurs propres

On cherche à résoudre par un schéma de type différences finies le problème suivant

$$-u''(x) + \nu u(x) = f(x), \quad \forall x \in]a; b[\quad (7.1)$$

$$\delta_a u(a) + \mu_a u'(a) = v_a \in \mathbb{R} \quad (7.2)$$

$$\delta_b u(b) + \mu_b u'(b) = v_b \in \mathbb{R} \quad (7.3)$$

où ν est une constante. Les autres paramètres sont décrits dans la section précédente.

L'objectif ici est double : commencer une généralisation de l'EDP à résoudre et étudier le

comportement de la solution numérique en fonction de ν . Il faut aussi noter que l'existence et l'unicité d'une solution à ce problème ne sont pas forcément assurées dans le cas général! Toutefois, il est possible de les obtenir sous les hypothèses (non optimales)

$$\nu > 0, \quad \mu_a \leq 0 \quad \mu_b \geq 0$$

avec f suffisamment régulière.

- Q. 23** a) Ecrire le programme *EDP7* (fichier EDP7.m) permettant de représenter une solution approchée du problème précédent.
- b) Ecrire le programme *OrdreEDP7* (fichier OrdreEDP7.m) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas h de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode.

□

Pour regarder le comportement de la solution en fonction de ν on va tout d'abord résoudre par un schéma de type différences finies le problème aux valeurs propres : Trouver (λ, v) solution de

$$-v''(x) = \lambda v(x), \quad \forall x \in]a; b[\quad (7.4)$$

$$\delta_a v(a) + \mu_a v'(a) = 0 \quad (7.5)$$

$$\delta_b v(b) + \mu_b v'(b) = 0 \quad (7.6)$$

On rappelle que pour le problème aux valeurs propres de Dirichlet ($\delta_a = \delta_b = 1$ et $\mu_a = \mu_b = 0$) avec $a = 0$ et $b = L$ les valeurs propres et fonctions propres associés sont donnés par

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2, \quad v_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right).$$

Q. 24 On se place dans le cas $\delta_a = \delta_b = 1$, $\mu_a = \mu_b = 0$, $a = 0$ et $b = L$.

- a) Proposer un schéma aux différences finies pour résoudre ce problème. Celui-ci pourra alors s'écrire sous la forme

$$\mathbb{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbb{B}\mathbf{v}$$

où \mathbb{A} et \mathbb{B} sont des matrices et \mathbf{v} un vecteur.

- b) A l'aide de la fonction *eigs* de Matlab (ou *eig* pour les matrices pleines), calculer les 10 valeurs propres les plus proches de 0 et représenter les vecteurs propres associés. ($[V, D] \leftarrow \text{eigs}(\mathbb{A}, \mathbb{B}, 10, 0)$)
- c) As t'on unicité de la solution de (7.1)-(7.2)-(7.3) si ν est l'opposé d'une des valeurs propres précédentes.
- d) Vérifier ces résultats on choisissant judicieusement les paramètres du programme *Edp7*.

□

Q. 25 On se place maintenant dans le cas général.

- a) Proposer un schéma aux différences finies pour résoudre le problème aux valeurs propres (7.4)-(7.5)-(7.6). Celui pourra alors s'écrire sous la forme

$$\mathbb{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbb{B}\mathbf{v}$$

où \mathbb{A} et \mathbb{B} sont des matrices et \mathbf{v} un vecteur.

- b) A l'aide de la fonction `eigs` de Matlab (ou `eig` pour les matrices pleines), calculer les 10 valeurs propres les plus proches de 0 et représenter les vecteurs propres associés. ($[V, D] \leftarrow \text{eigs}(\mathbb{A}, \mathbb{B}, 10, 0)$). Vérifier la pertinence des résultats trouvés.
- c) As-t-on unicité de la solution de (7.1)-(7.2)-(7.3) si ν est l'opposé d'une des valeurs propres précédentes ?
- d) Vérifier ces résultats en choisissant judicieusement les paramètres du programme `EDP7`.

□