Travaux pratiques - Examen du 13 janvier 2022 (3h00)

Sans documents, sans calculatrice, sans portable, ...
Le barème est donné à titre indicatif

Exercice 1 (9 points)

On cherche à résoudre par un schéma de type différences finies le problème suivant

$$-u''(x) + c(x)u'(x) + \alpha u(x) = f(x), \ \forall x \in]a; b[\quad (1)$$
$$u(a) = w_a \in \mathbb{R} \quad (2)$$
$$u'(b) + 2u(b) = w_b \in \mathbb{R} \quad (3)$$

où $c : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, w_a et w_b sont donnés.

Q. 1 ***a***. *Ecrire, de manière détaillée et en justifiant, un schéma d'ordre* 2 *associé au problème* (1)-(2)-(3).
b. *Expliquer en détails comment utiliser le schéma pour résoudre numériquement le problème* (1)-(2)-(3). □

Q. 2 (Matlab) *Ecrire un programme Matlab permettant de :*
- *résoudre le problème précédent avec des données judicieusement choisies (pour avoir une solution exacte),*
- *représenter graphiquement la solution exacte et la solution approchée.* □

Q. 3 (Matlab) *Ecrire un programme Matlab permettant de retrouver graphiquement l'ordre de la méthode.* □

Exercice 2 (11 points)

Soient $\Omega =]a, b[\times]c, d[\subset \mathbb{R}^2$ et $\Gamma = \partial\Omega$ la frontière du domaine Ω. On note $(x_i)_{i=0}^{N_x}$ et $(y_j)_{j=0}^{N_y}$ les discrétisation régulières, respectivement, des intervalles $[a, b]$ et $[c, d]$ défines par

$$x_i = a + ih_x, \ \forall i \in [\![0, N_x]\!] \quad \text{et} \quad y_j = c + jh_y, \ \forall j \in [\![0, N_y]\!] \quad (1)$$

avec $h_x = (b - a)/N_x$ et $h_y = (d - c)/N_y$. On note aussi

$$n_x = N_x + 1, \ \ n_y = N_y + 1 \ \text{ et } \ N = n_x \times n_y \quad (2)$$

Soient $f : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\kappa \in \mathbb{R}^+$ donnés. On veut résoudre le problème suivant

$$-\Delta u + \kappa u = f, \ \text{ dans } \Omega, \quad (3)$$
$$u = g, \ \text{ sur } \Gamma, \quad (4)$$

en utilisant le schéma différence finie d'ordre 2 suivant :

$$-\frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h_x^2} - \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{h_y^2} + \kappa U_{i,j} = f(x_i, y_j), \qquad \forall (i, j) \in]\!]0, N_x[\![\times]\!]0, N_y[\![, \quad (5)$$
$$U_{0,j} = g(a, y_j), \qquad \forall j \in]\!]0, N_y[\![, \quad (6)$$
$$U_{N_x,j} = g(b, y_j), \qquad \forall j \in]\!]0, N_y[\![, \quad (7)$$
$$U_{i,0} = g(x_i, c), \qquad \forall i \in [\![0, N_x]\!], \quad (8)$$
$$U_{i,N_y} = g(x_i, d), \qquad \forall i \in [\![0, N_x]\!], \quad (9)$$

avec $U_{i,j} \approx u(x_i, y_j)$.
Pour tout $i \in [\![0, N_x]\!]$, on note $\boldsymbol{U}_{i,:}$ le vecteur de $\mathbb{R}^{n_y}$ définit par

$$\boldsymbol{U}_{i,:} = \begin{pmatrix} U_{i,0} \\ \vdots \\ U_{i,N_y} \end{pmatrix}.$$

On note $\boldsymbol{V} = (V_1, \dots V_N)^t \in \mathbb{R}^N$ le vecteur bloc

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}_{0,:} \\ \hdashline \boldsymbol{U}_{1,:} \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \boldsymbol{U}_{N_x,:} \end{pmatrix}$$

Dans le cas de la numérotation en $(i, j) \in [\![0, N_x]\!] \times [\![0, N_y]\!]$ on parlera de **numérotation 2D** et pour la numérotation en $k \in [\![1, N]\!]$ on parlera de **numérotation globale**.

$\boxed{\textbf{Attention, ici, la numérotation globale est différente de celle utilisée en TP}}$

Dans cet exercice, lorsqu'un code Matlab est demandé sous forme **vectorisée**, celà sous-entend qu'il faut «*supprimer*» au maximum les boucles (dans la mesure du possible).

Q. 1 *Explicitez la bijection* $\mathcal{G} : [\![0, N_x]\!] \times [\![0, N_y]\!] \longrightarrow [\![1, N]\!]$ *telle que*

$$\forall (i, j) \in [\![0, N_x]\!] \times [\![0, N_y]\!], \quad V_k = U_{i,j}, \quad \textit{avec } k = \mathcal{G}(i, j).$$

Q. 2 (Matlab) ***a****. Ecrire la fonction* k=bijG(i,j ,...) *correspondant à la bijection* $\mathcal{G}$ *(* ***numerotation 2D*** *vers* ***numerotation globale****). Ici* ,... *peut correspondre à des paramètres supplémentaires nécessaires.*

b*. Ecrire la fonction réciproque* [i,j]=bijRecG(k,...) *correspondant à* $\mathcal{G}^{-1}$ *(* ***numerotation globale*** *vers* ***numerotation 2D****). On pourra utiliser la fonction* **rem**(x, y) *qui retourne le reste de la division entière de* x *par* y*. Ici* ,... *peut correspondre à des paramètres supplémentaires nécessaires.*

Q. 3 (Matlab) *Soient* $\boldsymbol{X}$ *et* $\boldsymbol{Y}$ *dans* $\mathbb{R}^N$ *les vecteurs (bloc) en numéroration globale tels que*

$$\forall k \in [\![1, N]\!],\ (i, j) = \mathcal{G}^{-1}(k),\ \boldsymbol{X}_k = x_i \quad \textit{et} \quad \boldsymbol{Y}_k = y_j.$$

Ecrire une fonction ***vectorisée*** $[\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}] =$ Grille$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ *où* $\boldsymbol{x} = (x_0, \dots, x_{N_x})$ *et* $\boldsymbol{y} = (y_0, \dots, y_{N_y})$ *correspondent, respectivement, aux discrétisations en* x *et en* y*. On pourra, pour celà, utiliser les fonctions écrites dans* **Q. 2***.*

Q. 4 (Matlab) *Soit* h *une fonction définie sur* $\bar{\Omega}$ *à valeurs réelles et Soit* $\boldsymbol{H} \in \mathbb{R}^N$ *le vecteur (bloc) en numéroration globale correspondant au stockage de tous les* $h(x_i, y_j)$, $\forall (i, j) \in [\![0, N_x]\!] \times [\![0, N_y]\!]$.

a*. Ecrire une fonction* ***vectorisée*** EvalFun2D *permettant à partir d'une fonction* h *donnée, définie de* $\bar{\Omega}$ *et à valeurs réelles, et des discrétisations* $\boldsymbol{x}$ *et* $\boldsymbol{y}$ *de retourner le vecteur* $\boldsymbol{H}$ *associé.*

b*. Ecrire un programme complet* ***vectorisé*** *permettant de représenter la fonction* $h : (x, y) \mapsto \cos(x^2 + y^2)$ *sur* $[-2, 2] \times [-3, 3]$*. On utilisera la fonction graphique Matlab/Octave* $\mathbf{surf}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \mathbb{Z})$ *avec* $\mathbb{Z} \in \mathcal{M}_{n_y, n_x}(\mathbb{R})$ *et* $\mathbb{Z}_{j,i} = h(x_{i-1}, y_{j-1})$, $\forall (i, j) \in [\![1, n_x]\!] \times [\![1, n_y]\!]$*. On pourra utiliser les fonctions déjà écrites.*

Chacune des équations du problème discret (5) à (9) correspond à une discrétisation en un point (x_i, y_j). Nous choisissons d'écrire ces équations en utilisant la même numérotation que lors de la construction du vecteur $\boldsymbol{V}$: l'équation *écrite* au point (x_i, y_j) sera écrite en ligne $k = \mathcal{G}(i, j)$ du système.

Q. 5 *Expliquer en détails que le problème discret* (5) *à* (9) *peut s'écrire sous la forme du système linéaire bloc (N équations)*

$$\left(\begin{array}{c|cccccc|c} \mathbb{E} & \mathbb{O} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{M} & \mathbb{D} & \mathbb{M} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{M} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \mathbb{O} & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbb{O} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbb{M} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{M} & \mathbb{D} & \mathbb{M} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{E} \end{array}\right) \boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{0,:} \\ \hdashline \boldsymbol{B}_{1,:} \\ \hdashline \vdots \\ \\ \vdots \\ \hdashline \boldsymbol{B}_{N_x,:} \end{pmatrix} \tag{10}$$

où chaque bloc de la matrice est une matrice de $\mathcal{M}_{n_y}(\mathbb{R})$*. La matrice* $\mathbb{O} \in \mathcal{M}_{n_y}(\mathbb{R})$ *est la matrice nulle. Les matrices creuses* $\mathbb{D}$, $\mathbb{M}$ *et* $\mathbb{E}$ *ainsi que les vecteurs* $\boldsymbol{B}_{i,:} \in \mathbb{R}^{n_y}$*, pour tout* $i \in [\![0, N_x]\!]$*, devront être donnés explicitement.*

Q. 6 (Matlab) *Ecrire la fonction* $\mathbb{A} =$ Assemble2D$(N, N_x, \mathbb{D}, \mathbb{E}, \mathbb{M})$ *retournant la matrice creuse (bloc) du système linéaire* (10) *où les matrices creuses* $\mathbb{D}$, $\mathbb{E}$, *et* $\mathbb{M}$ *sont supposées connues et passées en paramètre.*