Travaux pratiques - Examen du 14 janvier 2021 (3h00)

Sans documents, sans calculatrice, sans portable, ...
Le barême est donné à titre indicatif

Exercice 1 (5 points)

On cherche à résoudre par un schéma de type différences finies le problème suivant

$$\begin{aligned} -u''(x)+c(x)u'(x) &= f(x),\ \forall x\in]a;b[&& (1)\\ u'(a)-u(a) &= w_a\in\mathbb{R} && (2)\\ u(b) &= w_b\in\mathbb{R} && (3)\end{aligned}$$

où $c:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^+$, $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$, w_a et w_b sont donnés.

Q. 1 *Ecrire, en justifiant, un schéma d'ordre 2 associé au problème* (1)-(2)-(3). ☐

Q. 2 (Matlab) *Ecrire un programme Matlab permettant de :*
- *résoudre le problème précédent avec des données judicieusement choisies (pour avoir une solution exacte),*
- *représenter graphiquement la solution exacte et la solution approchée.* ☐

Q. 3 (Matlab) *Ecrire un programme Matlab permettant de retrouver graphiquement l'ordre de la méthode.* ☐

Exercice 2 (9 points)

On souhaite résoudre numériquement l'E.D.P. suivante

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)-\beta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)+\nu\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) &= f(t,x), && \forall (t,x)\in]t_0;t_0+T]\times]a;b[, && (1)\\ u(t_0,x) &= u_0(x), && \forall x\in[a;b], && (2)\\ \frac{\partial u}{\partial x}(t,b) &= v_b(t), && \forall t\in[t_0;t_0+T], && (3)\\ u(t,a) &= u_a(t), && \forall t\in]t_0;t_0+T]. && (4)\end{aligned}$$

avec $\nu>0$, $\beta>0$, $t_0\in\mathbb{R}$, $T>0$, $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $a<b$.
On note t^n, $n\in[\![0,N_t]\!]$ et x_i, $i\in[\![0,N_x]\!]$ les discrétisations régulières des intervalles $[t_0;t_0+T]$ et $[a;b]$ avec N_t pas de discrétisation en temps et N_x pas de discrétisation en espace. On souhaite résoudre l'E.D.P. à l'aide des schémas numériques

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{h_t}-\beta\frac{u_{i+1}^{n+1}-2u_i^{n+1}+u_{i-1}^{n+1}}{h_x^2}+\nu\frac{u_{i+1}^{n+1}-u_{i-1}^{n+1}}{2h_x} &= f_i^{n+1}. && (5)\\ u_{N_x-2}^{n+1}-4u_{N_x-1}^{n+1}+3u_{N_x}^{n+1} &= 2h_xv_b(t^{n+1}). && (6)\end{aligned}$$

Q. 1 **(a)**. *Expliquer précisement comment le schéma* (5) *(ordre* 1 *en temps et ordre* 2 *en espace) a été obtenu à partir de* (1) *et expliquer à quoi correspondent les valeurs* u_i^{n+1}, f_i^{n+1}, h_t *et* h_x.
(b). *Expliquer précisement comment le schéma* (6) *(ordre* 2*) a été obtenu à partir de* (3).
(c). *Donner une discrétisation (détaillée) du problème* (1) *à* (4) *en utilisant (entre autres) les schémas* (5) *et* (6). ☐

On note $\boldsymbol{U}^n$ les vecteurs de dimension N_x+1, de composantes $\boldsymbol{U}_i^n=u_{i-1}^n$, $\forall i\in[\![1,N_x+1]\!]$.

Q. 2 **(a)**. *Comment initialiser le vecteur* $\boldsymbol{U}^0$ *?*
(b). *En supposant le vecteur* $\boldsymbol{U}^n$ *déjà calculé, montrer que le vecteur* $\boldsymbol{U}^{n+1}$ *est solution du système linéaire*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{U}^{n+1}=\boldsymbol{b}^n \qquad (7)$$

en explicitant la matrice $\mathbb{A}$ *et le vecteur* $\boldsymbol{b}^n$ *(préciser les dimensions).* ☐

Q. 3 (Matlab) *Ecrire la fonction* **AssembleMat1D** *retournant la matrice* ***pleine*** *(pas* ***sparse****)* $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ *définie par*

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & \nu & 0 & \dots & \dots & 0 \\ b_1 & a_2 & c_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & b_{d-2} & a_{d-1} & c_{d-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \mu & b_{d-1} & a_d \end{pmatrix} \tag{8}$$

où $\boldsymbol{a} = (a_i)_{i=1}^d \in \mathbb{R}^d$, $\boldsymbol{b} = (b_i)_{i=1}^{d-1} \in \mathbb{R}^{d-1}$, $\boldsymbol{c} = (c_i)_{i=1}^{d-1} \in \mathbb{R}^{d-1}$ $\mu \in \mathbb{R}$ *et* $\nu \in \mathbb{R}$ *sont donnés.* □

Q. 4 (Matlab) *On se donne* $a = 0$, $b = 1$, $T = 10$, $f(t, x) = x^2 \cos(t)$, $u_0(x) = 10$, $k(x) = 2 + x$, $c = 1$, $v_a(t) = \sin(t)$,

$$u_b(t) = \begin{cases} 10 + 50t, & si\ t <= 2, \\ 110, & si\ t \in [2; 9[, \\ 110 - 50(t - 9), & si\ t \in [9; 10]. \end{cases}$$

Ecrire un programme Matlab complet permettant de résoudre le problème (1) *à* (4) *en utilisant les schémas* (5) *et* (6). □

Pour améliorer les performances du programme, nous allons réécrire la fonction AssembleMat1D sans utiliser de boucles et en utilisant la commande A=**sparse**(i,j,s,m,n).

Q. 5 (Matlab) **(a).** *Expliquer l'usage de la commande* A=**sparse**(i,j,s,m,n).

(b). *Ecrire la fonction* AssembleMat1DVec *retournant la matrice* ***creuse*** $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ *définie par* (8). ***Cette fonction ne devra pas utiliser de boucles*** **for** *ou* **while**. □

Exercice 3 (6 points)

Cet exercice a pour objectif la résolution d'une E.D.O.

Q. 1 *Rappeler précisement la définition d'un problème de Cauchy (vectoriel).* □

Un schéma de Runge-Kutta d'ordre 3 pour la résolution d'un problème de Cauchy vectoriel est donné par

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \boldsymbol{y}^{[n+1]} & = & \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{4}(\boldsymbol{k}_1 + 3\boldsymbol{k}_3) \\ \text{avec} & & \boldsymbol{k}_1 = \boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}), \\ & & \boldsymbol{k}_2 = \boldsymbol{f}(t^n + \frac{h}{3}, \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{3}\boldsymbol{k}_1), \\ & & \boldsymbol{k}_3 = \boldsymbol{f}(t^n + \frac{2h}{3}, \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{2h}{3}\boldsymbol{k}_2), \\ \boldsymbol{y}^{[0]} & & \text{donné.} \end{array} \right. \tag{1}$$

Q. 2 (Matlab) **(a).** *Ecrire la fonction Matlab* RedRK3 *permettant de résoudre un problème de Cauchy vectoriel par le schéma* (1).

(b). *Ecrire un programme Matlab permettant de vérifier numériquement l'ordre de cette méthode.* □

La **méthode de Nyström** explicite, à **pas multiples**, et d'ordre 3 est donnée par

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n-1]} + \frac{h}{3}\left(7\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}) - 2\boldsymbol{f}(t^{n-1}, \boldsymbol{y}^{[n-1]}) + \boldsymbol{f}(t^{n-2}, \boldsymbol{y}^{[n-2]})\right) \tag{2}$$

La **méthode de Adams-Moulton d'ordre 3** implicite est donné par

$$\boldsymbol{y}^{[n+1]} = \boldsymbol{y}^{[n]} + \frac{h}{12}\left(5\boldsymbol{f}(t^{n+1}, \boldsymbol{y}^{[n+1]}) + 8\boldsymbol{f}(t^n, \boldsymbol{y}^{[n]}) - \boldsymbol{f}(t^{n-1}, \boldsymbol{y}^{[n-1]})\right) \tag{3}$$

Q. 3 (Matlab) *Ecrire la fonction Matlab* PC3 *permettant de résoudre un problème de Cauchy (vectoriel) par une méthode de prédiction-correction utilisant les schémas* (2) *et* (3). *Cette fonction devra être optimisée en calcul de* $\boldsymbol{f}^{[n]}$ *et en place mémoire.* □

Application : Considérons le système mécanique de trois masses m_1, m_2 et m_3 attachées entre elles horizontalement par des ressorts de raideur k_1, k_2, k_3 et k_4. Les positions au cours du temps des masses par rapport à leurs positions d'équilibre sont données par les fonctions x_1, x_2 et x_3.

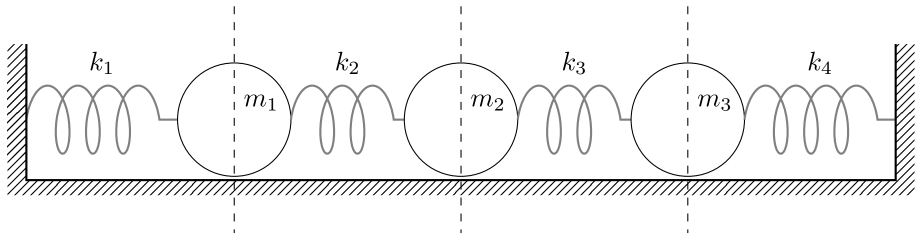

Figure 1 – Positions d'équilibre

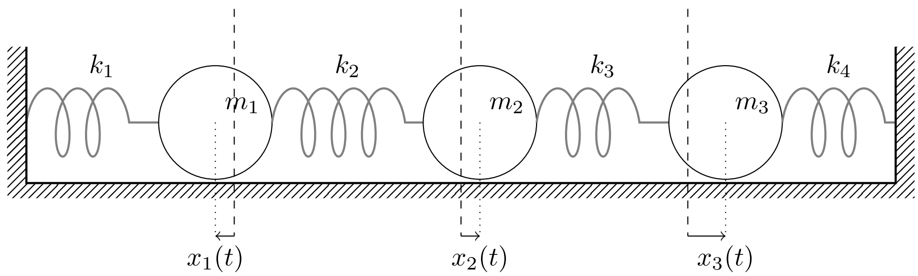

Figure 2 – En mouvement

Le système d'équations de mouvement du système s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1(t) + (k_1 + k_2)x_1(t) - k_2x_2(t) & = 0 \quad (4a)\\ m_2\ddot{x}_2(t) + (k_2 + k_3)x_2(t) - k_2x_1(t) - k_3x_3(t) & = 0 \quad (4b)\\ m_3\ddot{x}_3(t) + (k_3 + k_4)x_3(t) - k_3x_2(t) & = 0 \quad (4c)\end{cases}$$

On veut résoudre ce système d'E.D.O. avec pour données initiales $x_1(0) = 1$, $\dot{x}_1(0) = 0$, $x_2(0) = -1$, $\dot{x}_2(0) = 1/2$, $x_3(0) = 1/3$ et $\dot{x}_2(0) = -1/2$. Le temps final T sera égal à 20.

Q. 4 *Ecrire le problème précédent sous la forme d'un problème de Cauchy.* □

Q. 5 (Matlab) *Ecrire un Matlab complet permettant de résoudre* (4a)-(4b)-(4c) *avec les données initiales spécifiées. On prendra* $k_1 = k_4 = 1$, $k_2 = k_3 = 2$ *et* $m_1 = m_3 = 1$, $m_2 = 2$. *Ce programme devra aussi représenter sur une première figure les approximations des fonctions* x_1, x_2, x_3 *et sur une seconde figure les approximations des fonctions* $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$ *et* $\dot{x}_3$. *La qualité des figures représentées sera prise en compte dans la notation (en utilisant des légendes, titres, etc ...).* □