Travaux pratiques - Examen du 9 mars 2020 (2h30)

Sans documents, sans calculatrice, sans portable, ...
Le barème est donné à titre indicatif

Exercice 1 (11 points)

On souhaite résoudre numériquement l'E.D.P. suivante

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \kappa(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + c\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = f(t,x), \qquad \forall (t,x) \in]t_0; t_0+T]\times]a;b[, \tag{1}$$

$$u(t_0,x) = u_0(x), \qquad \forall x \in [a;b], \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,a) = v_a(t), \qquad \forall t \in [t_0; t_0+T], \tag{3}$$

$$u(t,b) = u_b(t), \qquad \forall t \in]t_0; t_0+T]. \tag{4}$$

avec $c > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $T > 0$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, $\kappa : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$.
On note t^n, $n \in [\![0, N_t]\!]$ et x_i, $i \in [\![0, N_x]\!]$ les discrétisations régulières des intervalles $[t_0; t_0+T]$ et $[a;b]$ avec N_t pas de discrétisation en temps et N_x pas de discrétisation en espace. On souhaite résoudre l'E.D.P. à l'aide des schémas numériques

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} - \kappa_i \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + c\frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} = f_i^{n+1}. \tag{5}$$

$$u_2^{n+1} - 4u_1^{n+1} + 3u_0^{n+1} = -2\Delta x v_a(t^{n+1}). \tag{6}$$

Q. 1 **(a)** *Expliquer précisement comment le schéma (5) (ordre 1 en temps et ordre 2 en espace) a été obtenu à partir de (1) et expliciter les valeurs u_i^{n+1}, f_i^{n+1}, c_i, Δt et Δx.*
(b) *Expliquer précisement comment le schéma (6) (ordre 2) a été obtenu à partir de (3).*
(c) *Donner une discrétisation (détaillée) du problème (1) à (4) en utilisant (entre autres) les schémas (5) et (6).*

On note $\boldsymbol{U}^n$ les vecteurs de dimension $N_x + 1$, de composantes $\boldsymbol{U}_i^n = u_{i-1}^n$, $\forall i \in [\![1, N_x+1]\!]$.

Q. 2 **(a)** *Comment initialiser le vecteur $\boldsymbol{U}^0$?*
(b) *En supposant le vecteur $\boldsymbol{U}^n$ déjà calculé, montrer que le vecteur $\boldsymbol{U}^{n+1}$ est solution du système linéaire*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{U}^{n+1} = \boldsymbol{b}^n \tag{7}$$

en explicitant la matrice $\mathbb{A}$ et le vecteur $\boldsymbol{b}^n$ (préciser les dimensions).

Q. 3 (Matlab) *Ecrire la fonction* **AssembleMat1D** *retournant la matrice* ***creuse*** $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ *définie par*

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \beta_1 & \alpha_1 & \eta_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \beta_{d-2} & \alpha_{d-2} & \eta_{d-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{pmatrix} \tag{8}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}^{d-2}$, $\beta \in \mathbb{R}^{d-2}$, $\eta \in \mathbb{R}^{d-2}$ $\mu \in \mathbb{R}^3$ et $\nu \in \mathbb{R}^3$ sont donnés.

Q. 4 (Matlab) *On se donne $a = -2$, $b = 2$, $T = 10$, $f(t,x) = x^2\cos(t)$, $u_0(x) = 10$, $k(x) = 2 + \sin(x)$, $c = 1$, $v_a(t) = \sin(t)$,*

$$u_b(t) = \begin{cases} 10 + 50t, & si\ t <= 1, \\ 60, & si\ t \in [1; 9[, \\ 60 - 50(t-9), & si\ t \in [9; 10]. \end{cases}$$

Ecrire un programme Matlab complet permettant de résoudre le problème (1) à (4) en utilisant les schémas (5) et (6).

Pour améliorer les performances du programme, nous allons réécrire la fonction AssembleMat1D sans utiliser de boucles et en utilisant la commande A=**sparse**(i,j,s,m,n).

Q. 5 (Matlab) **(a)** *Expliquer l'usage de la commande* A=**sparse**(i,j,s,m,n).

(b) *Ecrire la fonction* AssembleMat1DVec *retournant la matrice* ***creuse*** $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ *définie par* (8). ***Cette fonction ne devra pas utiliser de boucles*** **for** *ou* **while**.

Exercice 2 (9 points)

Soient $\Omega =]a, b[\times]c, d[\subset \mathbb{R}^2$ et $\Gamma = \partial\Omega$ la frontière du domaine Ω. On note Γ_N, Γ_S, Γ_O et Γ_E respectivement les frontières nord, sud, ouest et est. on a

$$\Gamma = \Gamma_N \cup \Gamma_S \cup \Gamma_O \cup \Gamma_E.$$

La normale unitaire extérieure à Γ est notée $\boldsymbol{n}$. On note $(x_i)_{i=0}^{N_x}$ et $(y_j)_{j=0}^{N_y}$ les discrétisation régulières, respectivement, des intervalles $[a, b]$ et $[c, d]$ défines par

$$x_i = a + ih_x, \ \forall i \in [\![0, N_x]\!] \quad \text{et} \quad y_j = c + jh_y, \ \forall j \in [\![0, N_y]\!] \tag{1}$$

avec $h_x = (b - a)/N_x$ et $h_y = (d - c)/N_y$. On note aussi

$$n_x = N_x + 1, \quad n_y = N_y + 1 \quad \text{et} \quad N = n_x \times n_y \tag{2}$$

Soient $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\kappa \in \mathbb{R}^+$ donnés. On veut résoudre le problème suivant

$$-\Delta u + \kappa u = f, \qquad \text{dans } \Omega \tag{3}$$

$$u = g, \qquad \text{sur } \Gamma \tag{4}$$

en utilisant la discrétisation d'ordre 2 suivante :

$$-\frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h_x^2} - \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{h_y^2} + \kappa U_{i,j} = f(x_i, y_j), \qquad \forall (i,j) \in]\!]0, N_x[\![\times]\!]0, N_y[\![, \tag{5}$$

$$U_{0,j} = g(a, y_j), \qquad \forall j \in]\!]0, N_y[\![, \tag{6}$$

$$U_{N_x,j} = g(b, y_j), \qquad \forall j \in]\!]0, N_y[\![, \tag{7}$$

$$U_{i,0} = g(x_i, c), \qquad \forall i \in [\![0, N_x]\!], \tag{8}$$

$$U_{i,N_y} = g(x_i, d), \qquad \forall i \in [\![0, N_x]\!]. \tag{9}$$

avec $U_{i,j} \approx u(x_i, y_j)$.
Pour tout $j \in [\![0, N_y]\!]$, on note $U_{:,j}$ le vecteur de $\mathbb{R}^{n_x}$ définit par

$$U_{:,j} = \begin{pmatrix} U_{0,j} \\ \vdots \\ U_{N_x,j} \end{pmatrix}.$$

On note $\boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^N$ le vecteur bloc

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} U_{:,0} \\ \hline U_{:,1} \\ \hline \vdots \\ \hline U_{:,N_y} \end{pmatrix}$$

Q. 1 *Explicitez la bijection* $\mathcal{F} : [\![0, N_x]\!] \times [\![0, N_y]\!] \longrightarrow [\![1, N]\!]$ *telle que*

$$\forall (i,j) \in [\![0, N_x]\!] \times [\![0, N_y]\!], \quad V_k = U_{i,j}, \quad \textit{avec } k = \mathcal{F}(i,j).$$

Dans le cas de la numérotation en $(i,j) \in [\![0, N_x]\!] \times [\![0, N_y]\!]$ on parlera de **numérotation 2D** et pour la numérotation en $k \in [\![1, N]\!]$ on parlera de **numérotation globale**.

Q. 2 (Matlab) *Ecrire la fonction* k=bijF(i,j,nx) *correspondant à la bijection* $\mathcal{F}$ *(* ***numerotation 2D*** *vers* ***numerotation globale****).*

Chacune des équations du problème discret (5)-(9) correspond à une discrétisation en un point (x_i, y_j). Nous choisissons d'écrire ces équations en utilisant la même numérotation que lors de la construction du vecteur $\boldsymbol{V}$: l'équation *écrite* au point (x_i, y_j) sera écrite en ligne $k = \mathcal{F}(i,j)$ du système.

Q. 3 *Etablir que le problème discret (5)-(9) peut s'écrire sous la forme du système linéaire bloc*

$$\left(\begin{array}{c|ccccc|c}
\mathbb{E} & \mathbb{O} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{O}\\
\hline
\mathbb{M} & \mathbb{D} & \mathbb{M} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{O}\\
\mathbb{O} & \mathbb{M} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\
\vdots & \mathbb{O} & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbb{O} & \vdots\\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbb{M} & \mathbb{O}\\
\mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{M} & \mathbb{D} & \mathbb{M}\\
\hline
\mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{E}
\end{array}\right) \boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} B_{:,0} \\ \hline B_{:,1} \\ \hline \vdots \\ \vdots \\ \hline B_{:,N_y}\end{pmatrix} \tag{10}$$

où chaque bloc de la matrice est une matrice de $\mathcal{M}_{n_x}(\mathbb{R})$. La matrice $\mathbb{O} \in \mathcal{M}_{n_x}(\mathbb{R})$ est la matrice nulle. Les matrices creuses $\mathbb{D}$, $\mathbb{M}$ et $\mathbb{E}$ ainsi que les vecteurs $B_{:,j} \in \mathbb{R}^{n_x}$, pour tout $j \in [\![0, N_y]\!]$, devront être donnés explicitement.

On note $\mathbb{I}_n$ la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{J}_n$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\mathbb{J}_n = \begin{pmatrix}
0 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\
0 & 1 & \ddots & & \vdots\\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\
\vdots & & \ddots & 1 & 0\\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0
\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Nous allons maintenant générer/assembler la matrice du système (10) **sans tenir compte des conditions aux limites** : on note $-\mathbb{A}_{xy}$ la matrice ainsi obtenue.
C'est une matrice bloc de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ avec n_y lignes bloc composées de blocs carrés de dimension n_x qui s'écrit sous la forme :

$$\mathbb{A}_{xy} = \left(\begin{array}{c|ccccc|c}
\mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{O}\\
\hline
\mathbb{O} & \mathbb{A}_x & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{O}\\
\mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{A}_x & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\
\vdots & \mathbb{O} & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbb{O} & \vdots\\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \mathbb{A}_x & \mathbb{O} & \mathbb{O}\\
\mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{A}_x & \mathbb{O}\\
\hline
\mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{O}
\end{array}\right)
\left(\begin{array}{c|ccccc|c}
\mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{O}\\
\hline
\mathbb{S}_y & \mathbb{T}_y & \mathbb{S}_y & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{O}\\
\mathbb{O} & \mathbb{S}_y & \mathbb{T}_y & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\
\vdots & \mathbb{O} & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbb{O} & \vdots\\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \mathbb{T}_y & \mathbb{S}_y & \mathbb{O}\\
\mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{S}_y & \mathbb{T}_y & \mathbb{S}_y\\
\hline
\mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{O}
\end{array}\right) \tag{11}$$

où

$$\mathbb{S}_y = \frac{1}{h_y^2}\mathbb{J}_{n_x}, \quad \mathbb{T}_y = -\frac{2}{h_y^2}\mathbb{J}_{n_x} \quad \text{et} \quad \mathbb{A}_x = \frac{1}{h_x^2}\mathbb{L}$$

avec

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\
1 & -2 & 1 & \ddots & & \vdots\\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\
\vdots & & \ddots & 1 & -2 & 1\\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n_x}(\mathbb{R})$$

On peut noter que les matrices $\mathbb{A}_x$, $\mathbb{T}_y$ et $\mathbb{S}_y$ sont des matrices de $\mathcal{M}_{n_x}(\mathbb{R})$.
Et maintenant quelques petits rappels sur le **produit tensoriel de kronecker** :
Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Le produit tensoriel de Kronecker de $\mathbb{A}$ par $\mathbb{B}$, noté $\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}$, est la matrice bloc de $\mathcal{M}_{mp,nq}(\mathbb{R})$ définie avec des blocs de dimension $p \times q$ par

$$\mathbb{A} \otimes \mathbb{B} = \begin{pmatrix}
\mathrm{A}_{1,1}\mathbb{B} & \cdots & \mathrm{A}_{1,n}\mathbb{B}\\
\vdots & \ddots & \vdots\\
\mathrm{A}_{m,1}\mathbb{B} & \cdots & \mathrm{A}_{m,n}\mathbb{B}
\end{pmatrix} \tag{12}$$

Le produit de Kronecker est bilinéaire et associatif : Si les dimensions des matrices $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ et $\mathbb{C}$ sont compatibles on a $\forall \lambda \in \mathbb{K}$

$$\mathbb{A} \otimes (\mathbb{B} + \lambda \cdot \mathbb{C}) = (\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}) + \lambda(\mathbb{A} \otimes \mathbb{C})$$
$$(\mathbb{A} + \lambda \cdot \mathbb{B}) \otimes \mathbb{C} = (\mathbb{A} \otimes \mathbb{C}) + \lambda(\mathbb{B} \otimes \mathbb{C})$$
$$\mathbb{A} \otimes (\mathbb{B} \otimes \mathbb{C}) = (\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}) \otimes \mathbb{C}$$

Par contre, il n'est pas commutatif.
Soit $\mathbb{K} = \mathbb{A} \otimes \mathbb{B}$. Cette matrice peut être calculée avec la fonction **kron** de Matlab/Octave :

$$\mathrm{K} = \textbf{kron}(\mathrm{A},\mathrm{B});$$

Si les matrices A et B sont creuses (**sparse**) alors K l'est aussi.
En notant $\mathbb{A}_y \in \mathcal{M}_{n_y}(\mathbb{R})$ la matrice définie par $\mathbb{A}_y = \frac{1}{h_y^2}\mathbb{L}$, on déduit de (11)

$$\mathbb{A}_{xy} = \mathbb{I}_{n_y} \otimes \mathbb{A}_x + \mathbb{A}_y \otimes \mathbb{I}_{n_x}. \tag{13}$$

Q. 4 (Matlab) **(a)** *Sans utiliser de boucles, écrire la fonction* Lap1DAssembling *retournant la matrice creuse* $\mathbb{L}$.

(b) *Ecrire la fonction* Lap2DAssembling *retournant la matrice bloc creuse* $\mathbb{A}_{xy}$ *en utilisant* (13).

(c) *Proposer un programme permettant de tester/valider la matrice ainsi obtenue en utilisant le laplacien d'une fonction de* $\mathbb{R}^2$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$.