Soient $\Omega =]a,b[\times]c,d[\subset \mathbb{R}^2$ et $\Gamma = \partial\Omega$ la frontière du domaine Ω. On note Γ_N, Γ_S, Γ_O, et Γ_E, respectivement, les frontières nord ($y = d$), sud ($y = c$), ouest ($x = a$), et est ($x = b$) . on a

$$\Gamma = \Gamma_N \cup \Gamma_S \cup \Gamma_O \cup \Gamma_E.$$

Soient $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions données. On veut résoudre le problème aux limites suivant : trouver $u : \Omega \longrightarrow R$ telle que

$$
\begin{aligned}
-\Delta u + \nu u &= f, && \text{dans } \Omega && (1)\\
u &= g_i, && \text{sur } \Gamma_i,\ \forall i \in \{O, E, S\} && (2)\\
\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u &= g_N, && \text{sur } \Gamma_N && (3)
\end{aligned}
$$

avec

— $\nu : \Omega \longrightarrow R$ une fonction positive,

— $f : \Omega \longrightarrow R$,

— $g_i : \Gamma_i \longrightarrow R$, $\forall i \in \{O, E, N, S\}$,

— $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

Pour résoudre ce problème numériquement, nous allons utiliser la méthode des différences finies.

Dans un **rapport manuscript**,

- établir un schéma d'ordre 2 associé au problème aux limites,
- montrer que ce schéma peut s'écrire sous la forme d'un système linéaire,
- expliquer comment assembler la matrice et le second membre du système linéaire,
- expliquer plusieurs méthodes permettant de tester/valider la pertinence de la solution numérique trouvée.

Ecrire un ensemble de programmes et fonctions permettant de résoudre par le schéma établi le problème aux limites. Des programmes/fonctions de tests et validations devront aussi être fournis. Un fichier README.txt sera fourni avec l'ensemble des codes expliquant le rôle de chaque fonction/programme.

Le rapport et les codes sont à rendre par voie éléctronique (mail ou message privé sur Discord) avant le dimanche 21 avril à 23h59. Un oral suivra.