

Soient  $\Omega = ]a, b[ \times ]c, d[ \subset \mathbb{R}^2$  et  $\Gamma = \partial\Omega$  la frontière du domaine  $\Omega$ . On note  $\Gamma_N, \Gamma_S, \Gamma_O$ , et  $\Gamma_E$ , respectivement, les frontières nord ( $y = d$ ), sud ( $y = c$ ), ouest ( $x = a$ ), et est ( $x = b$ ). on a

$$\Gamma = \Gamma_N \cup \Gamma_S \cup \Gamma_O \cup \Gamma_E.$$

Soient  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions données. On veut résoudre le problème aux limites suivant : trouver  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$-\Delta u + \nu u = f, \quad \text{dans } \Omega \quad (1)$$

$$u = g_i, \quad \text{sur } \Gamma_i, \quad \forall i \in \{E, S, N\} \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g_O, \quad \text{sur } \Gamma_O \quad (3)$$

avec

- $\nu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction positive,
- $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,
- $g_i : \Gamma_i \rightarrow \mathbb{R}, \forall i \in \{O, E, N, S\}$ ,
- $\alpha \in \mathbb{R}^+$ .

Pour résoudre ce problème numériquement, nous allons utiliser la méthode des différences finies.

Dans un **rapport manuscript**,

- établir un schéma d'ordre 2 associé au problème aux limites,
- montrer que ce schéma peut s'écrire sous la forme d'un système linéaire,
- expliquer comment assembler la matrice et le second membre du système linéaire,
- expliquer plusieurs méthodes permettant de tester/valider la pertinence de la solution numérique trouvée.

Ecrire un ensemble de programmes et fonctions permettant de résoudre par le schéma établi le problème aux limites. Des programmes/fonctions de tests et validations devront aussi être fournis. Un fichier README.txt sera fourni avec l'ensemble des codes expliquant le rôle de chaque fonction/programme.

Le rapport et les codes sont à rendre par voie électronique (mail ou message privé sur Discord) avant le dimanche 21 avril à 23h59. Un oral suivra.