Méthode bijection

$$\mathbb{A}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{B} \qquad \text{avec } \boldsymbol{V}_{\mathcal{F}(i,j)} = U_{i,j},\ \forall (i,j) \in [\![0, N_x]\!] \times [\![0, N_y]\!] \tag{11}$$

$$\beta_x(U_{i+\mathbf{1},j} + U_{i-\mathbf{1},j}) + \beta_y(U_{i,j+\mathbf{1}} + U_{i,j-\mathbf{1}}) + \mu U_{i,j} = f(x_i, y_j),\quad \forall (i,j) \in]\!]0, N_x[\![\times]\!]0, N_y[\![, \qquad (E_{i,j})$$
$$+\text{C.L.}$$

avec $\beta_x = \frac{-\mathbf{1}}{h_x^2}$, $\beta_y = \frac{-\mathbf{1}}{h_y^2}$, $\mu = \frac{\mathbf{2}}{h_x^2} + \frac{\mathbf{2}}{h_y^2}$

Choix écriture $(E_{i,j})$ dans (11) ☞ **ligne $k = \mathcal{F}(i,j) = jn_x + i + 1$**

Q. 9 *Proposer un algorithme permettant de créer la matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ et le second membre $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^N$ sans tenir compte des conditions aux limites (i.e. les lignes correspondantes sont laissées à zéros)*

Soit $(i,j) \in]\!]0, N_x[\![\times]\!]0, N_y[\![$ et $k = \mathcal{F}(i,j)$. La ligne k du système est donc

$$\beta_x(V_{\mathcal{F}(i+\mathbf{1},j)} + V_{\mathcal{F}(i-\mathbf{1},j)}) + \beta_y(V_{\mathcal{F}(i,j+\mathbf{1})} + V_{\mathcal{F}(i,j-\mathbf{1})}) + \mu V_{\mathcal{F}(i,j)} = f(x_i, y_j)$$

$$\beta_x(V_{k+\mathbf{1}} + V_{k-\mathbf{1}}) + \beta_y(V_{k+n_x} + V_{k-n_x}) + \mu V_k = f(x_i, y_j)$$

$$(\mathbb{A}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{B})_k \Leftrightarrow \sum_{r=\mathbf{1}}^{N} \mathrm{A}_{k,r} V_r = B_k \Leftrightarrow \begin{cases} \forall r \in [\![1, N]\!] \setminus \{k - n_x, k-1, k, k+1, k+n_x\},\ \mathrm{A}_{k,r} = 0, \\ \mathrm{A}_{k,k+\mathbf{1}} V_{k+\mathbf{1}} + \mathrm{A}_{k,k-\mathbf{1}} V_{k-\mathbf{1}} + \mathrm{A}_{k,k+n_x} V_{k+n_x} + \mathrm{A}_{k,k-n_x} V_{k-n_x} + \mu \mathrm{A}_{k,k} V_k = B_k \end{cases}$$

$$\mathrm{A}_{k,k-1} = \mathrm{A}_{k,k+1} = \beta_x,\quad \mathrm{A}_{k,k-n_x} = \mathrm{A}_{k,k+n_x} = \beta_y,\quad \mathrm{A}_{k,k} = \mu,\quad \text{sinon } \mathrm{A}_{k,r} = 0$$
$$B_k = f(x_i, y_j),\quad \text{où } k = \mathcal{F}(i,j),\ \text{et } (i,j) \in]\!]0, N_x[\![\times]\!]0, N_y[\![$$

pour $j = 1 : N_y - 1$
  pour $i = 1 : N_x - 1$
    $k \leftarrow$ bijF(i, j, n_x)
    $A(k, k-1) \leftarrow \beta_x$; $A(k, k+1) \leftarrow \beta_x$;
    $A(k, k-n_x) \leftarrow \beta_y$; $A(k, k+n_x) \leftarrow \beta_y$;
    $A(k, k) \leftarrow \mu$
    $B(k) \leftarrow f(x_i, y_j)$
  Fin
Fin

```
A=spalloc(nx*ny,nx*ny,5*nx*ny); % 5 éléments par ligne au maximum
for j=1:Ny-1
 for i=1:Nx-1
  k=bijF(i, j, nx);
  A(k,k)=mu;
  A(k,k-1)=betax;
  A(k,k+1)=betax;
  A(k,k-nx)=betay;
  A(k,k+nx)=betay;
  b(k)=f(x(i+1),y(j+1));
 end
end
```

Vectorisation, suppression de la boucle en i

```
A=spalloc(nx*ny,nx*ny,5*nx*ny); % 5 éléments par ligne au maximum
for j=1:Ny-1
 i=1:Nx-1;
 k=bijF(i, j, nx); % tableau dim. (1,Nx-1)
 A(sub2ind([N,N],k,k))=mu;
 A(sub2ind([N,N],k,k-1))=betax;
 A(sub2ind([N,N],k,k+1))=betax;
 A(sub2ind([N,N],k,k-nx))=betay;
 A(sub2ind([N,N],k,k+nx))=betay;
 b(k)=f(x(i+1),y(j+1));
end
```

voir matlab/testAssembleVec01.m

```
A=spalloc(nx*ny,nx*ny,5*nx*ny); % 5 éléments par ligne au maximum
j=1:Ny-1; i=1:Nx-1;
k=bijF(i', j, nx); % tableau dim. (Nx-1,Ny-1)
k=k(:); % tableau dim. ((Nx-1)*(Ny-1),1)
A(sub2ind([N,N],k,k))=mu;
A(sub2ind([N,N],k,k-1))=betax;
A(sub2ind([N,N],k,k+1))=betax;
A(sub2ind([N,N],k,k-nx))=betay;
A(sub2ind([N,N],k,k+nx))=betay;
F=f(x(i+1)',y(j+1));
b(k)=F(:);
```

```
i=1:Nx-1; j=1:Ny-1;
k=bijF(i', j, nx); % tableau dim. (Nx-1,Ny-1)
k=k(:)'; % vecteur ligne
Ne=numel(k);
Ig=[];Jg=[];Kg=[];
Ig = [Ig, k]; Jg = [Jg, k]; Kg = [Kg, mu*ones(1,Ne)];
Ig = [Ig, k]; Jg = [Jg, k-1]; Kg = [Kg, betax*ones(1,Ne)];
Ig = [Ig, k]; Jg = [Jg, k+1]; Kg = [Kg, betax*ones(1,Ne)];
Ig = [Ig, k]; Jg = [Jg, k-nx]; Kg = [Kg, betay*ones(1,Ne)];
Ig = [Ig, k]; Jg = [Jg, k+nx]; Kg = [Kg, betay*ones(1,Ne)];
A=sparse(Ig,Jg,Kg,N,N);
F=f(x(i+1)',y(j+1));
b(k)=F(:);
```

```
i=1:Nx-1; j=1:Ny-1;
k=bijF(i', j, nx); % tableau dim. (Nx-1,Ny-1)
k=k(:)'; % vecteur ligne
Ne=numel(k);
Ig=[k,k,k,k,k];
Jg=[k,k-1,k+1,k-nx,k+nx];
Kg=ones(Ne,1)*[mu,betax,betax,betay,betay];Kg=Kg(:)';
A=sparse(Ig,Jg,Kg,N,N);
F=f(x(i+1)',y(j+1));
b(k)=F(:);
```

```
i=1:Nx-1; j=1:Ny-1;
k=bijF(i', j, nx); % tableau dim. (Nx-1,Ny-1)
k=k(:); % vecteur colonne
Ne=numel(k);
Ig=repmat(k,[1,5]);
Jg=I+[0,-1,1,-nx,nx];
Kg=ones(Ne,1)*[mu,betax,betax,betay,betay];
A=sparse(Ig(:),Jg(:),Kg(:),N,N);
F=f(x(i+1)',y(j+1));
b(k)=F(:);
```