Institut GALILÉE
Université Sorbonne Paris Nord
*Ing. MACS 2*

UNIVERSITÉ SORBONNE PARIS NORD
*Année 2024-2025*

# TPs EDP [a]

## Travaux Pratiques $N^o$ 2

•••••••

## Algorithmique : génération de maillages

[a] Version du 7 octobre 2024

- Les questions **en autonomie** seront à faire en dehors des TPs encadrés.
- Pour l'ensemble des questions, un **travail sur feuilles** est primordial : la méthode *essais/erreurs* employée très régulièrement par les étudiants risque d'aboutir à des fonctions complexes et difficile à débugger.

# Table des matières

# 1 Introduction

Soit $\Omega$ un domaine borné de $\mathbb{R}^2$.

**Definition 1.** *On appelle triangulation de $\Omega$, une famille $\mathcal{T}_h$ de triangles $T_k$, $k = 1, \dots, n_{\text{me}}$,*[1] *ayant les propriétés suivantes :*

*(i) l'intersection entre deux triangles distincts est soit vide, soit réduite à une coté entier ou à un point ;*
*(ii) tous les coins de la frontière $\Gamma$ sont des sommets de triangles de $\mathcal{T}_h$;*
*(iii) réciproquement, soit*

$$\Omega_h = \bigcup_{k=1}^{n_{\text{me}}} T_k \tag{1}$$

*(remarquer que $\Omega_h$ est fermé) ; tous les coins de $\Gamma_h = \partial\Omega_h$ doivent être sur $\Gamma$;*
*(iv) les triangles ne sont pas dégénérés, ie. ils ne sont pas d'aire nulle.*

**Remarque 1.** *nous avons*

$$\Omega_h = \bigcup_{k=1}^{n_{\text{me}}} T_k \quad et \quad \bigcap_{k=1}^{n_{\text{me}}} \overset{\circ}{T}_k = \varnothing \tag{2}$$

En Figure 1, deux exemples de triangulation sont représentés.

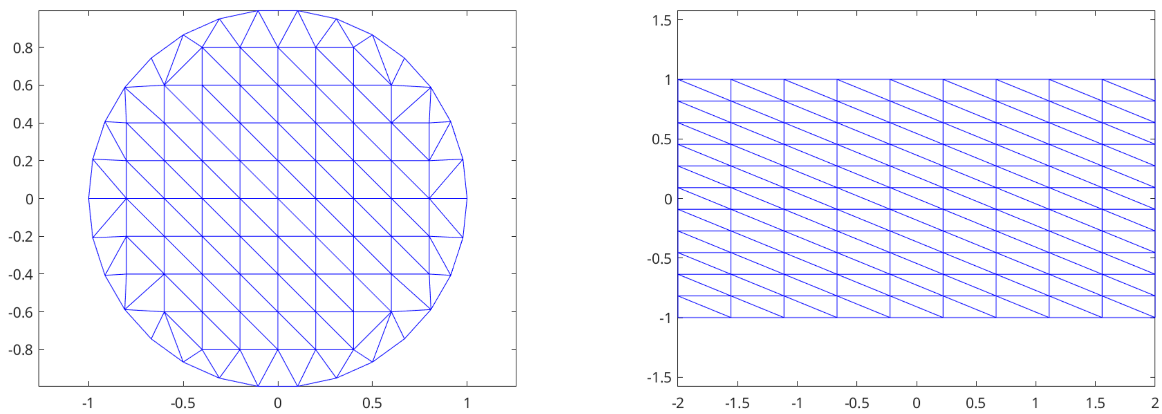


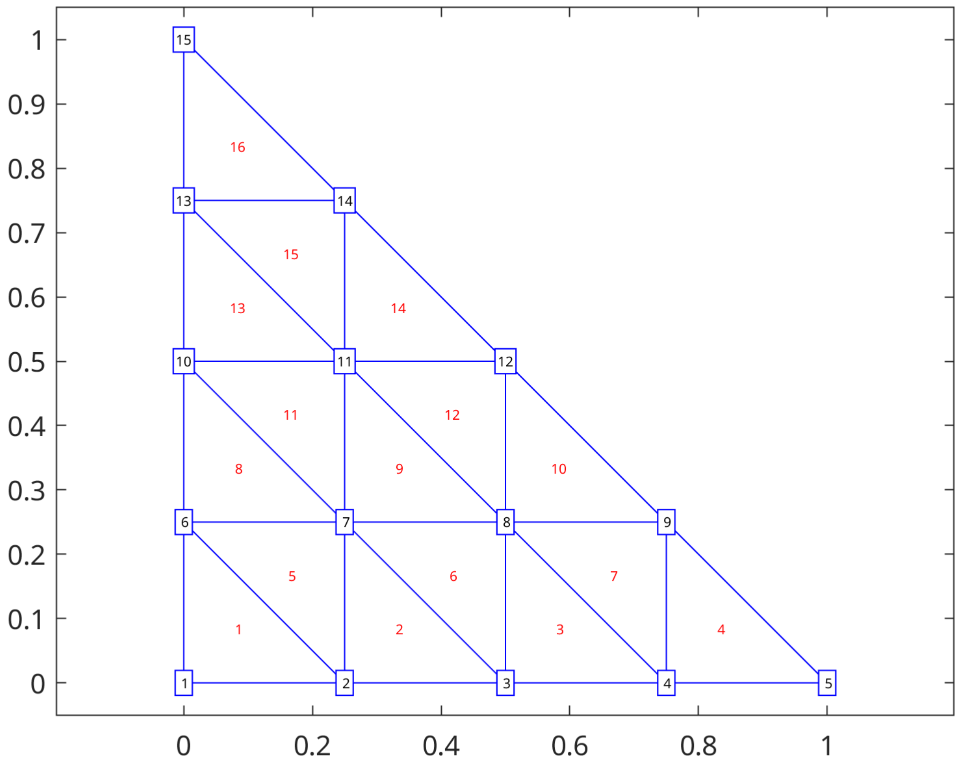

FIGURE 1 – Maillages triangulaires du disque unité (à gauche) et du rectangle $[-2, 2] \times [-1, 1]$ (à droite).

Pour stocker les informations (minimales) relatives à un maillage, on utilise les tableaux $\boldsymbol{q}$ et $\boldsymbol{me}$ respectivements tableau des sommets/points et tableau de connectivité :

| **nom** | **type** | **dimension** | **descriptif** |
|---|---|---|---|
| $n_q$ | entier | 1 | nombre total de noeuds (sommets) du maillage |
| $n_{\text{me}}$ | entier | 1 | nombre de triangles |
| q | réels | $2 \times n_q$ | q(il,i) est la il-ème coordonnée du i-ème sommet, il $\in \{1, 2\}$ et i $\in \{1, \dots, n_q\}$. Le i-ème sommet sera aussi noté $\boldsymbol{q}^i = (\boldsymbol{q}^i_x, \boldsymbol{q}^i_y)$ avec $\boldsymbol{q}^i_x =$ q(1,i) et $\boldsymbol{q}^i_y =$ q(2,i) |
| me | entier | $3 \times n_{\text{me}}$ | me(jl,k) indice de stockage, dans le tableau q, du jl-ème sommet du triangle d'indice k, jl $\in \{1, 2, 3\}$ et k $\in \{1, \dots, n_{\text{me}}\}$. Pour tout triangle la numérotation des points est dans le **sens direct**. q(:,me(1,k)) est le 1er sommet du k-ème triangle, q(:,me(2,k)) est le 2ème sommet, ... |

1. $n_{\text{me}}$ *number of mesh elements*

Voici sur un exemple le contenu des tableaux q et me sur un maillage du triangle unité :



Les nombres rouges (non encadrés) sont les numéros des triangles (relativement au tableau me) et les nombres bleus (encadrés) sont les numéros des points ( relativement au tableau q ).

```
q =

  Columns 1 through 7

         0    0.2500    0.5000    0.7500    1.0000         0    0.2500
         0         0         0         0         0    0.2500    0.2500

  Columns 8 through 14

    0.5000    0.7500         0    0.2500    0.5000         0    0.2500
    0.2500    0.2500    0.5000    0.5000    0.5000    0.7500    0.7500

  Column 15

         0
    1.0000


me =

  Columns 1 through 13

     1     2     3     4     2     3     4     6     7     8     7     8    10
     2     3     4     5     7     8     9     7     8     9    11    12    11
     6     7     8     9     6     7     8    10    11    12    10    11    13

  Columns 14 through 16
```

```
11    11    13
12    14    14
14    13    15
```

L'archive fournie `TP2.zip` contient plusieurs fichiers `.mat` dans le répertoire `mat`. Chacun de ces fichiers correspond à un maillage donné contenant le tableau des points `q` et le tableau de connectivité `me`. Pour lire le fichier `mat/unitsquaremesh_5_6.mat` sous Matlab/Octave, on peut utiliser la commande **load** pour initialiser les tableaux `q` et `me` :
Si le répertoire de travail contient le répertoire `mat`, la commande

```
load( fullfile ('mat','unitsquaremesh_5_6.mat'))
```

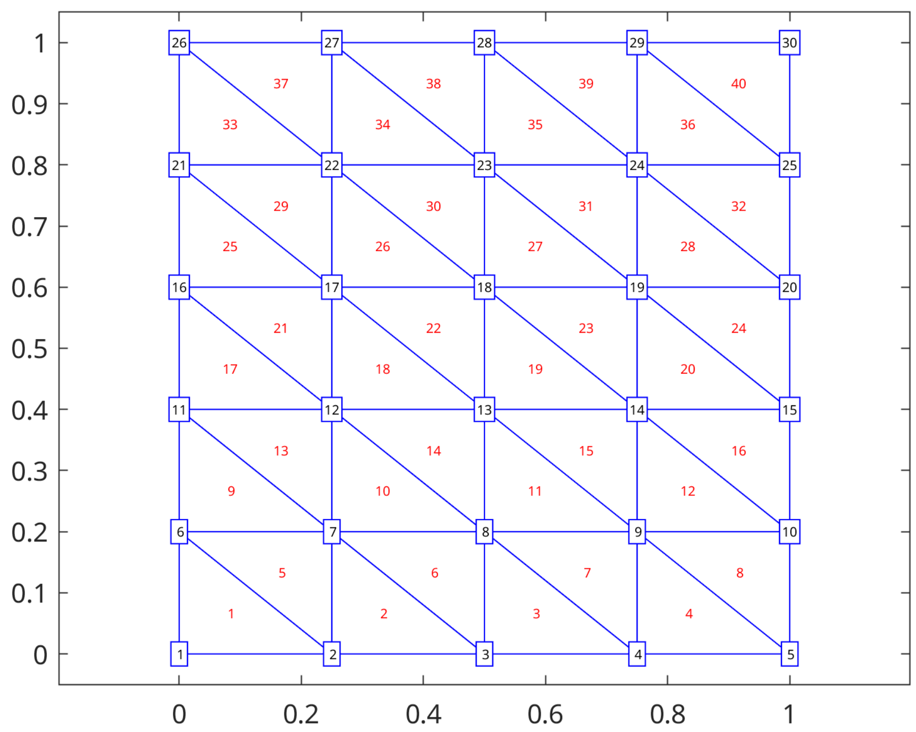
permet de récupérer les tableaux `q` et `me`.

**Q. 1** *Ecrire une fonction* `ba=meshes.barycenters(q,me)` *(fonction* `barycenters` *du namespace* `meshes` *) retournant le tableau* `ba` *de dimension* $2 \times n_{\mathrm{me}}$ *tel que* $\mathrm{ba}(:,\mathrm{k})$ *soit le barycentre du* k*-ème triangle spécifié par le tableau des sommets* `q` *et le tableau de connectivité* `me`*. Pour celà créer et utiliser une fonction* `triangle.barycenter` *retournant le barycentre d'un triangle.* □

L'archive fournie `TP2.zip` contient des fonctions permettant de représenter un maillage, d'afficher les numéros des sommets, des triangles... Les deux fonctions principales, du *namespace* `graphics`, sont

- `graphics.plotmesh(q,me)` : représentation d'un maillage donné par `q` et `me`,
- `graphics.plotmeshnumbers(q,me)` : représentation d'un maillage donné par `q` et `me`, avec les numéros des sommets et des triangles.

Cette dernière fonction utilise la fonction `graphics.ElementsNumbers` qui appelle la fonction `meshes.barycenters` qui vient d'être écrite. Voir Listing 1 pour un exemple d'utilisation (script `demos.demo00`).




Listing 1 – Exemple d'utilisation de la fonction graphics.plotmeshnumbers

```
load(fullfile('mat','unitsquaremesh_5_6.mat')) % loading q and me arrays
graphics.plotmeshnumbers(q,me)
axis equal
```

Si les numéros des sommets et des triangles sont trop petits (fonte de taille 5 par defaut), on peut changer la taille des fontes (10 par ex.) en utilisant

graphics.plotmeshnumbers(q,me,'FontSize',10)

## 2 Génération de maillages

**Q. 2** *Ecrire une fonction* [q,me]=meshes.unitsquare(Nx,Ny) *retournant les tableaux de points et de connectivité associé au carré unité* $[0,1] \times [0,1]$ *avec* Nx *points suivant* $x$ *et* Ny *points suivant* $y$ *comme présenté en Figure 2.* □

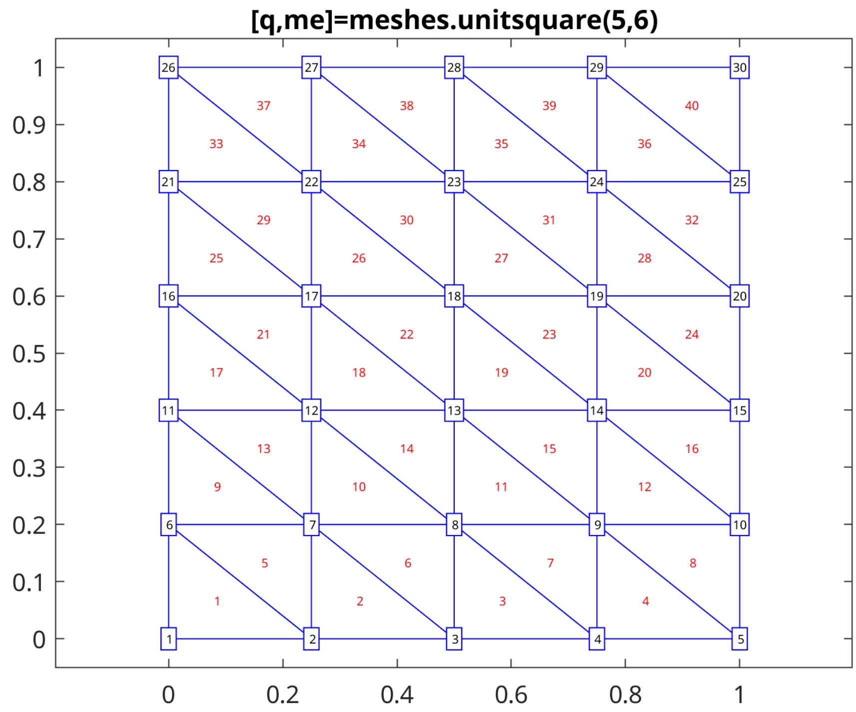



FIGURE 2 – Maillage du carré unité avec des triangles.

**Q. 3** *Ecrire une fonction* [q,me]=meshes.rectangle(a,b,c,d,Nx,Ny) *retournant les tableaux de points et de connectivité associé au rectangle* $[a,b] \times [c,d]$ *avec* Nx *points suivant* $x$ *et* Ny *points suivant* $y$ *comme présenté en Figure 3.* □

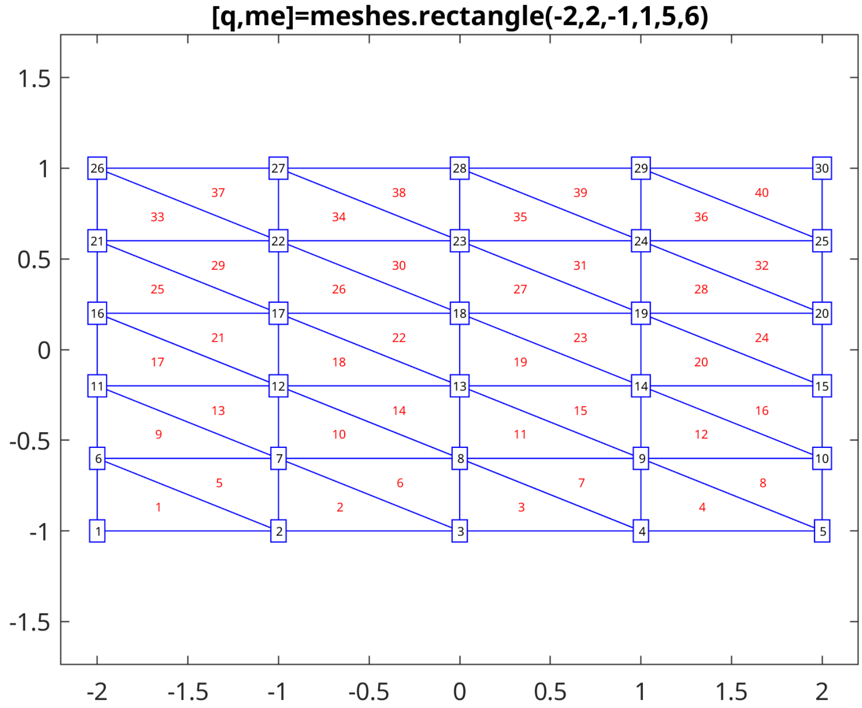



FIGURE 3 – Maillage du rectangle $[a, b] \times [c, d]$ avec des triangles.

**Q. 4 [en autonomie]** *Ecrire une fonction* [q,me]=meshes.unittriangle(N) *retournant les tableaux de points et de connectivité associé au triangle (de référence) de sommet* $(0, 0)$, $(1, 0)$ *et* $(0, 1)$ *avec* N *points sur chacune des arêtes comme présenté en Figure 4.* □

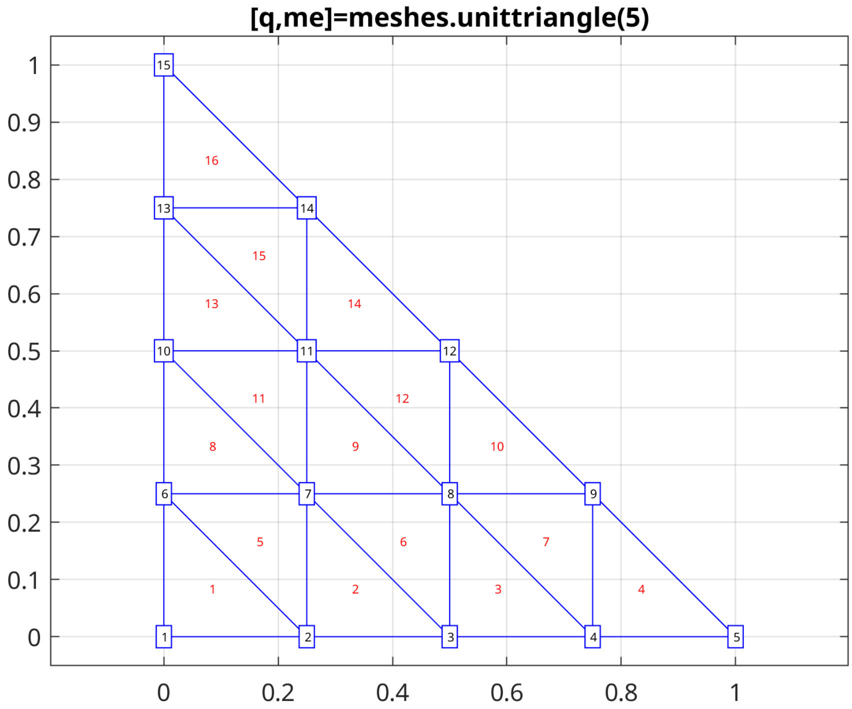



FIGURE 4 – Maillage du triangle de référence avec des triangles.

**Remarque 2.** *Soit $\hat{K}$ le triangle de référence et $K$ un triangle non dégénéré de sommets $(\boldsymbol{q}^0, \boldsymbol{q}^1, \boldsymbol{q}^2)$. La fonction $\mathcal{F}_K$ définie par*

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{F}_K & : & \hat{K} \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & K \subset \mathbb{R}^2 \\ & & \hat{\boldsymbol{q}} = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} & \longmapsto & \boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}^0 + (\boldsymbol{q}^1 - \boldsymbol{q}^0)\hat{x} + (\boldsymbol{q}^2 - \boldsymbol{q}^0)\hat{y} \end{array} \quad (3)$$

*est une bijection.*

> **Q. 5 [en autonomie]** *Ecrire une fonction* `[q,me]=meshes.triangle(q0,q1,q2,N)` *retournant les tableaux de points et de connectivité associé au triangle de sommets* `q0`, `q1` *et* `q2` *avec* `N` *points sur chacune des arêtes comme présenté en Figure 5.*

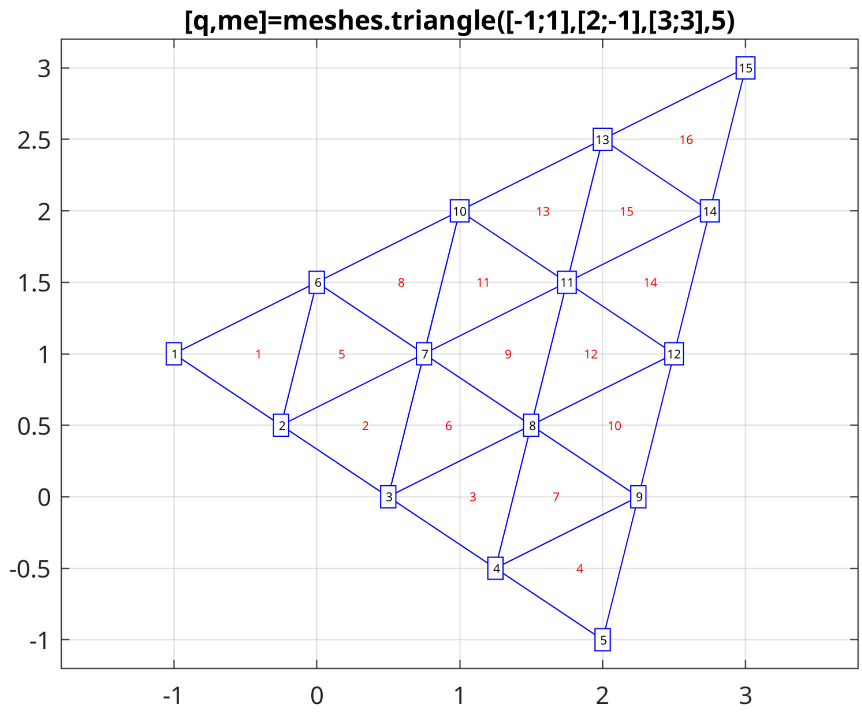



FIGURE 5 – Maillage du triangle de sommets $(-1,1)$ $(2,-1)$ et $(3,3)$ avec des triangles.

□

## 3 Génération de maillage avec la fonction delaunay

A partir d'un tableau de points, il est possible d'utiliser la fonction delaunay pour générer un tableau de connectivité.

**Q. 6** *Ecrire une fonction* [q,me]=meshes.rectangledel(a,b,c,d,Nx,Ny) *retournant les tableaux de points et de connectivité associé au rectangle* $[a,b]\times[c,d]$ *avec* Nx *points suivant* $x$ *et* Ny *points suivant* $y$*. Le tableau de points devra être généré avec la fonction* **meshgrid** *et Le tableau de connectivité avec la fonction* delaunay *.* □

**Q. 7** *Ecrire une fonction* [q,me]=meshes.triangledel(q0,q1,q2,N) *retournant les tableaux de points et de connectivité associé au triangle de sommets* q0, q1 *et* q2 *avec* N *points sur chacune des arêtes. le tableau de connectivité devra être généré avec la fonction* delaunay *.* □

**Q. 8 [en autonomie]** *Ecrire une fonction* [q,me]=meshes.disk(center,radius,N) *retournant les tableaux de points et de connectivité associé au disque de centre* center *et de rayon* radius *avec* N *points sur le cercle (bord) extérieur. Le tableau de connectivité devra être généré avec la fonction* delaunay *. Il faudra veiller, lors de la génération des points, à ce que les distances entre points voisins (ou longueurs des arêtes des triangles) soient suffisament «proches» pour ne pas obtenir, au final, des triangles trop «aplatis». Ils existent de nombreuses stratégies pour générer le tableau des points. A vous d'en choisir une et de l'implémenter. Deux stratégies sont représentées en Figure 6.* □

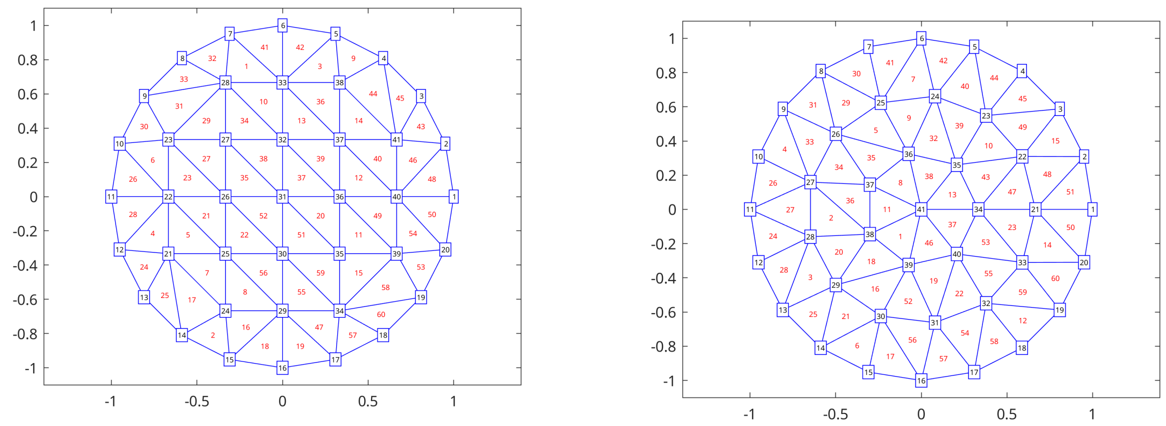


FIGURE 6 – Exemples de maillages du disque unité avec N=20 points sur le bord.

# 4 Calcul des aires

L'objectif ici est de calculer les aires de tous les triangles d'un maillage donné par ses tableaux de sommets et de connectivité.
Soit $\boldsymbol{q}^0$, $\boldsymbol{q}^1$ et $\boldsymbol{q}^2$ les trois sommets d'un triangle $K$ non-dégénéré. On note $\mathbb{A}_K = (\boldsymbol{q}^1 - \boldsymbol{q}^0 \,|\, \boldsymbol{q}^2 - \boldsymbol{q}^0)$ la matrice $2 \times 2$.
La fonction $\mathcal{F}_K$ définie en (3) peut alors s'écrire

$$\mathcal{F}_K(\hat{\boldsymbol{q}}) = \mathbb{A}_K \hat{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{q}^0 \tag{4}$$

et on a

$$\int_K f(\boldsymbol{q}) d\boldsymbol{q} = |\det(\mathbb{A}_K)| \int_{\hat{K}} f \circ \mathcal{F}_K(\hat{\boldsymbol{q}}) d\hat{\boldsymbol{q}}. \tag{5}$$

**Q. 9** *Ecrire une fonction* [areas]=meshes.areas(q,me) *retournant le tableau des aires associé au maillage.* areas(k) *sera l'aire du* k*-ème triangle du maillage.* □