TPs Algo./E.D.P.

Travaux Pratiques N^o 3

Méthodes des différences finies
E.D.P.s 1D stationnaires

Version du 22 novembre 2024

Table des matières

1 Approximation de dérivées premières

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a, b]$ et suffisament régulière.

Q. 1 *Montrer que l'on a*

$$f'(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x})}{h} + \mathcal{O}(h) \tag{1.1}$$

$$f'(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x}) - f(\bar{x}-h)}{h} + \mathcal{O}(h) \tag{1.2}$$

Q. 2 *On note $x_i = a + ih$, $i \in [\![0, n]\!]$, une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$. Soit une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ suffisament régulière. On suppose que les y_i sont donnés par*

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{1.3}$$

Ecrire une fonction **diff**.d1fo1 *(fichier `+diff/d1fo1.m`) permettant de calculer des approximations d'ordre 1 de $f'(x_i)$ pour $i \in [\![0, n]\!]$.*

Pour obtenir une formule d'approximation d'ordre 2 de $f'(\bar{x})$, on suppose $f \in \mathcal{C}^3(]a, b[)$ et on peut alors développer les formules de Taylor de $f(\bar{x}+h)$ et $f(\bar{x}-h)$ jusqu'au troisième ordre.
On obtient alors

$$f'(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2). \tag{1.4}$$

- Cette approximation est la formule des **différences finies centrées**.
- Cette approximation est d'ordre 2.

Q. 3 *Montrer que l'on a les deux formules suivantes*

$$f'(\bar{x}) = -\frac{f(\bar{x}+2h) - 4f(\bar{x}+h) + 3f(\bar{x})}{2h} + \mathcal{O}(h^2), \tag{1.5}$$

$$f'(\bar{x}) = \frac{3f(\bar{x}) - 4f(\bar{x}-h) + f(\bar{x}-2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2). \tag{1.6}$$

Q. 4 *On note $x_i = a + ih$, $i \in [\![0, n]\!]$, une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$. Soit une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ suffisament régulière. On suppose que les y_i sont donnés par*

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{1.7}$$

Ecrire une fonction **diff**.d1fo2 *(fichier* `+diff/d1fo2.m`*) permettant de calculer des approximations d'ordre 2 de $f'(x_i)$ pour $i \in [\![0, n]\!]$.*

Q. 5 *Ecrire un programme, nommé* **diff**.order_d1f *, permettant de vérifier graphiquement, pour chacune des 2 fonctions précédentes , l'ordre des erreurs. voir figure 1.*

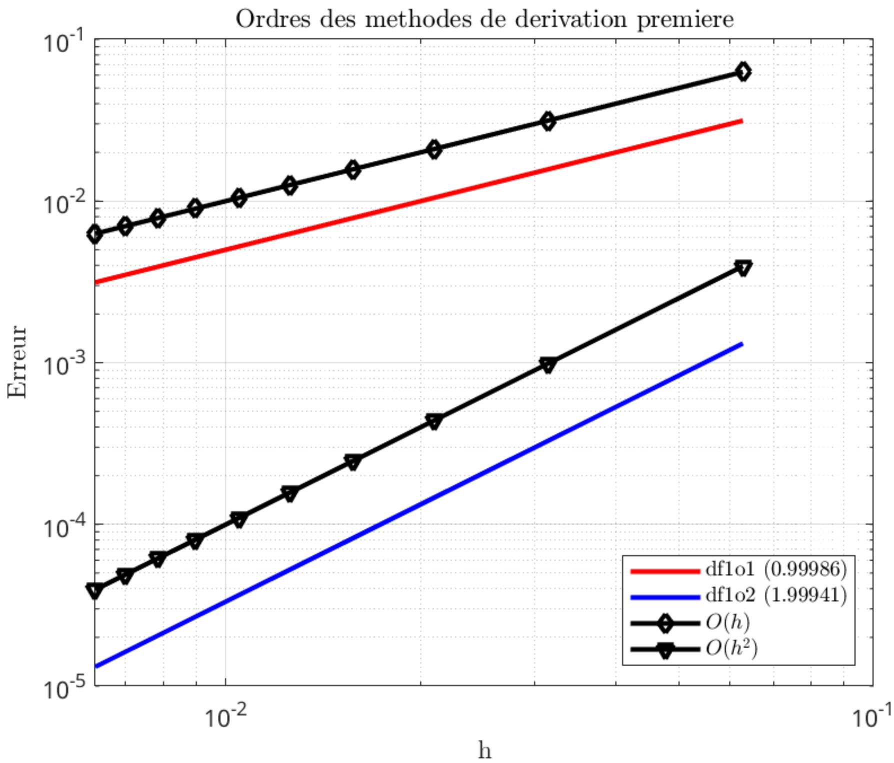

Figure 1 – Ordre de l'erreur des méthodes de dérivation

2 Approximation de dérivées secondes

L'objectif ici est déterminer une approximation d'ordre 2 de la dérivée seconde d'une fonction f (suffisament régulière) en les points d'une discrétisation régulière $x_i = a + ih$, $i \in [\![0, n]\!]$, de l'intervalle $[a, b]$.

Q. 6 a. *Montrer que l'on a la formule suivante utilisant deux points de part et d'autres de $\bar{x}$:*

$$f^{(2)}(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x}+h) - 2f(\bar{x}) + f(\bar{x}-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \tag{2.1}$$

b. On va établir une formule n'utilisant que des points après $\bar{x}$. Pour celà montrer que

$$h^2 f^{(2)}(\bar{x}) = f(\bar{x}) - 2f(\bar{x}+h) + f(\bar{x}+2h) - h^3 f^{(3)}(\bar{x}) + \mathcal{O}(h^4), \tag{2.2}$$

$$3h^2 f^{(2)}(\bar{x}) = 2f(\bar{x}) - 3f(\bar{x}+h) + f(\bar{x}+3h) - 4h^3 f^{(3)}(\bar{x}) + \mathcal{O}(h^4). \tag{2.3}$$

Puis en déduire

$$f^{(2)}(\bar{x}) = \frac{2f(\bar{x}) - 5f(\bar{x}+h) + 4f(\bar{x}+2h) - f(\bar{x}+3h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2). \tag{2.4}$$

c. Etablir la formule suivante n'utilisant que des points avant $\bar{x}$:

$$f^{(2)}(\bar{x}) = \frac{2f(\bar{x}) - 5f(\bar{x}-h) + 4f(\bar{x}-2h) - f(\bar{x}-3h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2). \tag{2.5}$$

Q. 7

Ecrire une fonction **diff**.d2fo2 *permettant de calculer des approximations d'ordre 2 de $f^{(2)}(x_i)$ pour $i \in [\![0, n]\!]$.*

Q. 8

Ecrire un programme, nommé **diff**.order_d2f *, permettant de vérifier/retrouver graphiquement, l'ordre de la méthode d'approximation précédente. voir figure 2.*

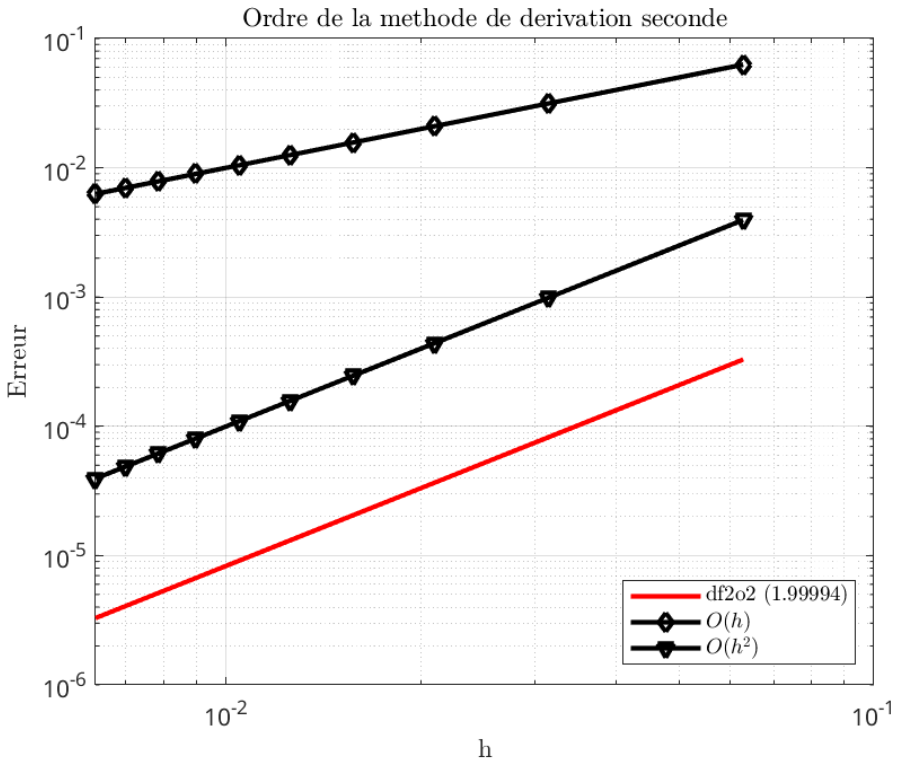

FIGURE 2 – Ordre de l'erreur lors de l'approximation de la dérivée seconde

3 B.V.P. modèle Dirichlet/Dirichlet

On souhaite résoudre par un schéma de type différences finies le problème aux limites (*Boundary Value Problem*) suivant

$$-u''(x) = f(x), \ \forall x \in]a; b[\tag{3.1}$$
$$u(a) = g_a \in \mathbb{R} \tag{3.2}$$
$$u(b) = g_b \in \mathbb{R} \tag{3.3}$$

On peut prendre comme jeux de données :

$$a = -\frac{2}{3}\pi, \ b = \frac{3}{2}, \ f(x) = 4\cos(2x) - 9\sin(-3x+1), \ g_a = -\sin(1) - \frac{1}{2} \text{ et } g_b = \cos(3) + \sin\left(\frac{7}{2}\right).$$

Dans ce cas la solution exacte est

$$u(x) = \cos(2x) - \sin(-3x+1).$$

On définit la matrice associée au laplacien (en 1D opérateur dérivée seconde) discrétisé à l'ordre 2 par $\mathbb{K} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ avec

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Q. 9

a. Ecrire une fonction matrix.Lap1D *(fichier* +matrix/Lap1D.m*) permettant de générer cette matrice.*

b. Proposer plusieurs méthodes pour tester/valider cette fonction sur des bases mathématiques et les implémenter dans des fonctions matrix.Lap1Dvalid01 *,* matrix.Lap1Dvalid02 *, ... ayant (au moins) comme argument la dimension de la matrice.*

On note $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i=0}^N$ une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$.

Q. 10

Montrer qu'un schéma aux différences finies pour la résolution du problème (3.1)-(3.2)-(3.3) s'écrit sous la la forme matricielle

$$\left(\begin{array}{c|cccccc|c} h^2 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \hline -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ \hline 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & h^2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} u_0 \\ \hline u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \\ \hline u_N \end{array}\right) = h^2 \left(\begin{array}{c} u_a \\ \hline f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ f(x_{N-2}) \\ f(x_{N-1}) \\ \hline u_b \end{array}\right) \tag{3.4}$$

où $u_i \approx u(x_i)$, $\forall i \in [\![0, N]\!]$.

On admettra que ce schéma est (au moins) d'ordre 2 (voir cours de Mme Darbas) :

$$\max_{i \in [\![0,N]\!]} |u(x_i) - u_i| = \mathcal{O}(h^2). \tag{3.5}$$

Q. 11

a. Ecrire une fonction BVP0.solve *(fichier* +BVP0/solve.m*) permettant de résoudre numériquement le problème (3.1)-(3.2)-(3.3) dont les données seront passées en paramètre. Cette fonction devra retourner la discrétisation en espace et la solution numérique trouvée.*

b. *Ecrire un programme* BVP0.example *(fichier* +BVP0/example.m*) permettant de de résoudre numériquement le problème (3.1)-(3.2)-(3.3), avec le jeu de données proposées, par un schéma différences finies d'ordre* 2*. Ce programme representera graphiquement, et de manière propre, la solution numérique obtenue, la solution exacte et l'erreur.*

Q. 12

Ecrire le programme BVP0.order *(fichier* +BVP0/order.m*) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas h de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode. Un exemple de représentation est donné en Figure 3.*

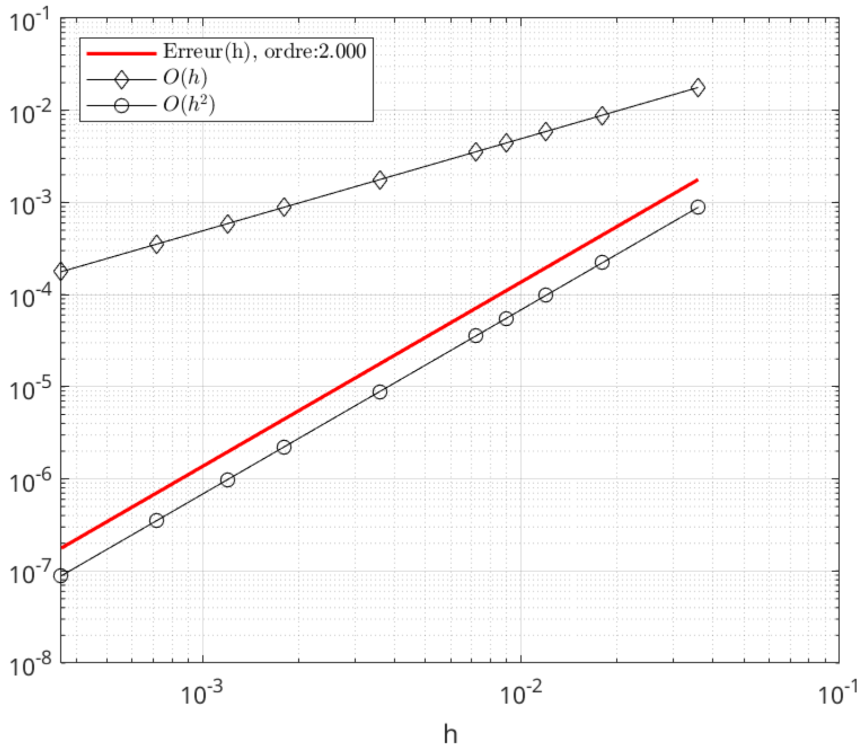

FIGURE 3 – Ordre du schéma représenté avec BVP0.order . Dans la légende, la valeur de l'ordre est déterminée numériquement.

Q. 13

a. *Ecrire un programme* BVP1.example *(fichier* +BVP1/example.m*) permettant de calculer une solution approchée de :*

$$-u''(x) + \nu u(x) = f(x), \ \forall x \in]a; b[\tag{3.6}$$
$$u(a) = g_a \in \mathbb{R} \tag{3.7}$$
$$u(b) = g_b \in \mathbb{R} \tag{3.8}$$

avec $\nu \geqslant 0$ et un choix judicieux de données, ce programme représentera graphiquement la solution numérique obtenue, la solution exacte et l'erreur.

b. *Ecrire le programme* BVP1.order *(fichier* +BVP1/order.m*) permettant de représenter, en échelle logarithmique, l'erreur en fonction du pas h de discrétisation et d'afficher l'ordre de la méthode. Le jeu de données sera choisi judicieusement.*

4 B.V.P. modèle Neumann/Dirichlet

On cherche à résoudre par un schéma de type différences finies le problème suivant

$$-u''(x) = f(x), \ \forall x \in]a; b[\tag{4.1}$$
$$u'(a) = v_a \in \mathbb{R} \tag{4.2}$$
$$u(b) = u_b \in \mathbb{R} \tag{4.3}$$

On peut prendre comme jeux de données $a = -\frac{1}{4}\pi$, $b = \frac{1}{3}\pi$, $f(x) = \sin(x) - 2$, $g_a = -\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{2}$ et $g_b = \frac{1}{9}\pi^2 + \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Dans ce cas la solution exacte est $u(x) = x^2 + \sin(x)$.

4.1 Neumann ordre 1

Dans la condition aux limites de Neumann (4.2), on va approcher $u'(a)$ à l'ordre 1 par

$$\frac{u(a+h) - u(a)}{h}.$$

Q. 14 *Ecrire le programme* BVP2.example *(fichier* +BVP2/example.m*) permettant de représenter une solution approchée du problème précédent. Avec un choix judicieux de données, ce programme representera graphiquement la solution numérique obtenue, la solution exacte et l'erreur.*

Q. 15 *Ecrire le programme* BVP2.order *(fichier* +BVP2/order.m*) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas h de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode.*

4.2 Neumann ordre 2

Dans la condition aux limites de Neumann (4.2), on va approcher $u'(a)$ à l'ordre 2 par

$$\frac{-u(a+2h) + 4u(a+h) - 3u(a)}{2h}.$$

Q. 16 *Ecrire le programme* BVP3.example *(fichier* +BVP3/example.m*) permettant de représenter une solution approchée du problème précédent. Avec un choix judicieux de données, ce programme representera graphiquement la solution numérique obtenue, la solution exacte et l'erreur.*

Q. 17 *Ecrire le programme* BVP3.order *(fichier* +BVP3/order.m*) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas h de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode.*

5 B.V.P. modèle Dirichlet/Robin

On cherche à résoudre par un schéma de type différences finies le problème suivant

$$-u''(x) = f(x), \ \forall x \in]a; b[\tag{5.1}$$
$$u(a) = g_a \in \mathbb{R} \tag{5.2}$$
$$u'(b) + \mu u(b) = g_b \in \mathbb{R} \tag{5.3}$$

On choisira un jeu de données de manière à avoir une solution exacte non triviale.

5.1 Robin ordre 1

Dans la condition aux limites de Robin (5.2), on va approcher $u'(b)$ à l'ordre 1 par $\frac{u(b)-u(b-h)}{h}$

Q. 18
Ecrire le programme BVP4.example *(fichier* +BVP4/example.m*) permettant de représenter une solution approchée du problème précédent. Avec un choix judicieux de données, ce programme representera graphiquement la solution numérique obtenue, la solution exacte et l'erreur.*

Q. 19
Ecrire le programme BVP4.order *(fichier* +BVP4/order.m*) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas h de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode.*

5.2 Robin ordre 2

Q. 20

a. Dans la condition aux limites de Robin (5.2), déterminer comment approcher $u'(b)$ à l'ordre 2.

b. Ecrire le programme BVP5.example *(fichier* +BVP5/example.m*) permettant de représenter une solution approchée du problème précédent. Avec un choix judicieux de données, ce programme representera graphiquement la solution numérique obtenue, la solution exacte et l'erreur.*

Q. 21
Ecrire le programme BVP5.order *(fichier* +BVP5/order.m*) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas h de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode.*

6 B.V.P. avec conditions aux limites génériques

On cherche à résoudre par un schéma de type différences finies le problème suivant

$$-u''(x) = f(x), \ \forall x \in]a;b[\tag{6.1}$$
$$\delta_a u'(a) + \mu_a u(a) = g_a \in \mathbb{R} \tag{6.2}$$
$$\delta_b u'(b) + \mu_b u(b) = g_b \in \mathbb{R} \tag{6.3}$$

où δ_a et δ_b sont donnés dans $\{0, 1\}$ et μ_a et μ_b sont deux réels donnés.

Q. 22

a. Donner un jeu de valeurs δ_a, δ_b, μ_a, μ_b, pour lesquelles il n'y a pas trivialement unicité de la solution de (6.1),(6.2),(6.3).

b. Ecrire une discrétisation à l'ordre 2 de chacune des condition aux limites.

c. Pour chacune des conditions écrire une fonction permettant de la prendre en compte dans le système linéaire.

d. Ecrire le programme BVP6.example *(fichier* +BVP6/example.m*) permettant de représenter une solution approchée du problème précédent. Que se passe-t'il lorsqu'il n'y a pas unicité de la solution (théorique) ?*

e. Ecrire le programme BVP6.order *(fichier* +BVP6/order.m*) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas h de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode.*

7 Début de généralisation et valeurs propres (en autonomie)

On cherche à résoudre par un schéma de type différences finies le problème suivant

$$-u''(x) + \nu u(x) = f(x), \ \forall x \in]a;b[\tag{7.1}$$
$$\delta_a u'(a) + \mu_a u(a) = g_a \in \mathbb{R} \tag{7.2}$$
$$\delta_b u'(b) + \mu_b u(b) = g_b \in \mathbb{R} \tag{7.3}$$

où ν est une constante. Les autres paramètres sont décrits dans la section précédente.
L'objectif ici est double : commencer une généralisation de l'EDP à résoudre et étudier le comportement de la solution numérique en fonction de ν. Il faut aussi noter que l'existence et l'unicité d'une solution à ce problème ne sont pas forcément assurées dans le cas général ! Toutefois, il est possible de les obtenir sous les hypothèses (non optimales)

$$\nu > 0, \quad \mu_a \leqslant 0 \quad \mu_b \geqslant 0$$

avec f suffisament régulière.

Q. 23

a. Ecrire une fonction BVP.solve *(fichier* +BVP/solve.m*) permettant de résoudre numériquement le problème* (7.1)-(7.2)-(7.3) *dont les données seront passées en paramètre sous forme d'une unique* ***structure****. Cette fonction devra retourner la discrétisation en espace et la solution numérique trouvée.*

b. Ecrire un programme BVP.example *(fichier* +BVP/example.m*) permettant de représenter une solution approchée du problème précédent.*

c. Ecrire le programme BVP.order *(fichier* +BVP/order.m*) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas h de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode.*

Pour regarder le comportement de la solution en fonction de ν on va tout d'abord résoudre par un schéma de type différences finies le problème aux valeurs propres : Trouver (λ, v) solution de

$$-v''(x) = \lambda v(x), \ \forall x \in]a; b[\tag{7.4}$$

$$\delta_a v'(a) + \mu_a v(a) = 0 \tag{7.5}$$

$$\delta_b v'(b) + \mu_b v(b) = 0 \tag{7.6}$$

On rappelle que pour le problème aux valeurs propres de Dirichlet ($\delta_a = \delta_b = 0$ et $\mu_a = \mu_b = 1$) avec $a = 0$ et $b = L$ les valeurs propres et fonctions propres associés sont donnnés par

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2, \quad v_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right).$$

Q. 24

On se place dans le cas $\delta_a = \delta_b = 0$, $\mu_a = \mu_b = 1$, $a = 0$ et $b = L$.

a. Proposer un schéma aux différences finies pour résoudre ce problème. Celui-ci pourra alors s'écrire sous la forme

$$\mathbb{A}\boldsymbol{v} = \lambda\mathbb{B}\boldsymbol{v}$$

où $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ sont des matrices et $\boldsymbol{v}$ un vecteur.

b. A l'aide de la fonction eigs *de Matlab/Octave, calculer les* 10 *valeurs propres les plus proches de* 0 *et representer les vecteurs propres associés.* ($[V, D] \leftarrow$ eigs$(\mathbb{A}, \mathbb{B}, 10, 0)$)

c. As t'on unicité de la solution de (7.1)-(7.2)-(7.3) *si ν est l'opposé d'une des valeurs propres précédentes.*

d. Vérifier ces résultats on choisissant judicieusement les paramètres du programme BVP.example *.*

Q. 25

On se place maintenant dans le cas général.

a. Proposer un schéma aux différences finies pour résoudre le problème aux valeurs propres (7.4)-(7.5)-(7.6)*. Celui pourra alors s'écrire sous la forme*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{v} = \lambda\mathbb{B}\boldsymbol{v}$$

où $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ sont des matrices et $\boldsymbol{v}$ un vecteur.

b. A l'aide de la fonction eigs *de Matlab/Octave, calculer les* 10 *valeurs propres les plus proches de* 0 *et representer les vecteurs propres associés. Vérifier la pertinence des résultats trouver.*

c. As t'on unicité de la solution de (7.1)-(7.2)-(7.3) *si ν est l'opposé d'une des valeurs propres précédentes ?*

d. Vérifier ces résultats en choisissant judicieusement les paramètres du programme BVP.example *.*