Différences finies 2D avec Matlab/Octave
Prémisses au TP 5
Sup'Galilée, Ingénieurs MACS, 2ème année

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications
Institut Galilée
Université Paris XIII.

03/12/2024

Prérequis : avoir étudier l'introduction sur les matrices creuses du TP 5.

Exercice

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ avec $N = d \times n$ une matrice tridiagonale blocs

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{D} & \mathbb{F} & \mathbb{O} & \cdots & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{E} & \mathbb{D} & \mathbb{F} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{E} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \mathbb{O} & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbb{O} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbb{F} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{E} & \mathbb{D} & \mathbb{F} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{E} & \mathbb{D} \end{pmatrix}, \text{ avec } \mathbb{D}, \mathbb{E} \text{ et } \mathbb{F} \text{ dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Q. 1 Matrice pleine

*On prend n=2;d=7;N=d*n; avec E=eye(n);D=2*E;F=3*E; Comment calculer $\mathbb{A}$? (voir `exemple03.m`)*

Q. 2 Matrice creuse

*On prend n=2;d=7;N=d*n; avec E=speye(n);D=2*E;F=3*E; Comment calculer $\mathbb{A}$? (voir `exemple03s.m`)*

Q. 3

On se donne les 3 matrices creuses $\mathbb{D}$, $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. *Ecrire la fonction Assemble retournant la matrice creuse $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$. (voir `Assemble.m`)*
2. *Ecrire la fonction AssembleSpVec retournant la matrice creuse $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ sans utiliser de boucle. (voir `AssembleSpVec.m`)*


```
>> exo01.bench_Assemble
 n= 100, d=  20, full: 0.004 (s) - sparse: 0.005 (s) - ratio 0.85
 n= 100, d=  40, full: 0.009 (s) - sparse: 0.003 (s) - ratio 3.00
 n= 100, d=  60, full: 0.014 (s) - sparse: 0.009 (s) - ratio 1.57
 n= 100, d=  80, full: 0.016 (s) - sparse: 0.009 (s) - ratio 1.91
 n= 200, d=  20, full: 0.011 (s) - sparse: 0.004 (s) - ratio 2.63
 n= 200, d=  40, full: 0.022 (s) - sparse: 0.006 (s) - ratio 3.78
 n= 200, d=  60, full: 0.035 (s) - sparse: 0.011 (s) - ratio 3.09
 n= 200, d=  80, full: 0.046 (s) - sparse: 0.017 (s) - ratio 2.78
 n= 300, d=  20, full: 0.022 (s) - sparse: 0.010 (s) - ratio 2.27
 n= 300, d=  40, full: 0.045 (s) - sparse: 0.009 (s) - ratio 4.92
 n= 300, d=  60, full: 0.069 (s) - sparse: 0.018 (s) - ratio 3.75
 n= 300, d=  80, full: 0.092 (s) - sparse: 0.028 (s) - ratio 3.34
 n= 400, d=  20, full: 0.035 (s) - sparse: 0.017 (s) - ratio 2.07
 n= 400, d=  40, full: 0.074 (s) - sparse: 0.012 (s) - ratio 6.06
 n= 400, d=  60, full: 0.112 (s) - sparse: 0.024 (s) - ratio 4.59
 n= 400, d=  80, full: 0.151 (s) - sparse: 0.039 (s) - ratio 3.82
>> % avec Matlab
```

Matlab : Assemble , full et sparse

```
octave:11> exo01.bench_Assemble
 n= 100, d=  20, full: 0.006 (s) - sparse: 0.007 (s) - ratio 0.86
 n= 100, d=  40, full: 0.055 (s) - sparse: 0.007 (s) - ratio 7.48
 n= 100, d=  60, full: 0.118 (s) - sparse: 0.019 (s) - ratio 6.23
 n= 100, d=  80, full: 0.205 (s) - sparse: 0.036 (s) - ratio 5.76
 n= 200, d=  20, full: 0.053 (s) - sparse: 0.027 (s) - ratio 1.98
 n= 200, d=  40, full: 0.204 (s) - sparse: 0.018 (s) - ratio 11.52
 n= 200, d=  60, full: 0.456 (s) - sparse: 0.048 (s) - ratio 9.50
 n= 200, d=  80, full: 0.803 (s) - sparse: 0.098 (s) - ratio 8.17
 n= 300, d=  20, full: 0.118 (s) - sparse: 0.108 (s) - ratio 1.10
 n= 300, d=  40, full: 0.467 (s) - sparse: 0.032 (s) - ratio 14.46
 n= 300, d=  60, full: 1.015 (s) - sparse: 0.101 (s) - ratio 10.05
 n= 300, d=  80, full: 1.815 (s) - sparse: 0.186 (s) - ratio 9.76
 n= 400, d=  20, full: 0.211 (s) - sparse: 0.218 (s) - ratio 0.97
 n= 400, d=  40, full: 0.823 (s) - sparse: 0.043 (s) - ratio 19.00
 n= 400, d=  60, full: 1.827 (s) - sparse: 0.147 (s) - ratio 12.42
 n= 400, d=  80, full: 3.449 (s) - sparse: 0.299 (s) - ratio 11.54
```

Octave : Assemble , full et sparse

```
>> exo01.bench_Assemble02
 n= 1000, d= 200, sparse:   0.526 (s) - sparse vec.:   0.042 (s) - ratio  12.57
 n= 1000, d= 400, sparse:   2.059 (s) - sparse vec.:   0.071 (s) - ratio  29.12
 n= 1000, d= 600, sparse:   4.783 (s) - sparse vec.:   0.105 (s) - ratio  45.65
 n= 2000, d= 200, sparse:   1.028 (s) - sparse vec.:   0.066 (s) - ratio  15.60
 n= 2000, d= 400, sparse:   4.277 (s) - sparse vec.:   0.182 (s) - ratio  23.53
 n= 2000, d= 600, sparse:   9.660 (s) - sparse vec.:   0.268 (s) - ratio  36.03
 n= 3000, d= 200, sparse:   1.625 (s) - sparse vec.:   0.086 (s) - ratio  18.80
 n= 3000, d= 400, sparse:   6.392 (s) - sparse vec.:   0.200 (s) - ratio  31.93
 n= 3000, d= 600, sparse:  14.108 (s) - sparse vec.:   0.365 (s) - ratio  38.61
>> % Avec Matlab
```

Matlab : Assemble sparse et AssembleSpVec

```
octave:10> exo01.bench_Assemble02
 n= 1000, d= 200, sparse:   1.610 (s) - sparse vec.:   0.033 (s) - ratio  49.51
 n= 1000, d= 400, sparse:   7.064 (s) - sparse vec.:   0.086 (s) - ratio  82.00
 n= 1000, d= 600, sparse:  16.001 (s) - sparse vec.:   0.101 (s) - ratio  158.64
 n= 2000, d= 200, sparse:   3.511 (s) - sparse vec.:   0.054 (s) - ratio  65.38
 n= 2000, d= 400, sparse:  14.533 (s) - sparse vec.:   0.150 (s) - ratio  97.07
 n= 2000, d= 600, sparse:  32.395 (s) - sparse vec.:   0.218 (s) - ratio  148.64
 n= 3000, d= 200, sparse:   5.388 (s) - sparse vec.:   0.101 (s) - ratio  53.58
 n= 3000, d= 400, sparse:  21.596 (s) - sparse vec.:   0.204 (s) - ratio  105.87
 n= 3000, d= 600, sparse:  48.261 (s) - sparse vec.:   0.305 (s) - ratio  158.42
octave:11>
```

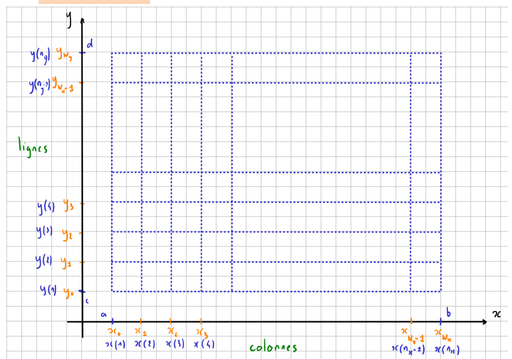
Octave : Assemble sparse et AssembleSpVec

Plan

Soit $f(x,y) = cos(x) + sin(y)$. Nous souhaitons représenter cette fonction sur $[a,b] \times [c,d]$

```
if length(dbstack)==1, clear all;close all;end
f=@(x,y) cos(x+y).*sin(x-y);
a=-1;b=1;nx=51;
c=1;d=6;ny=113;

x=linspace(a,b,nx);
y=linspace(c,d,ny);

[X,Y]=meshgrid(x,y);
Z=f(X,Y);

figure(1)
surf(X,Y,Z)
xlabel('x');ylabel('y');zlabel('z')

Z2=f(x,y');
figure(2)
surf(x,y,Z2)
xlabel('x');ylabel('y');zlabel('z')
```

voir exemple04.m and co



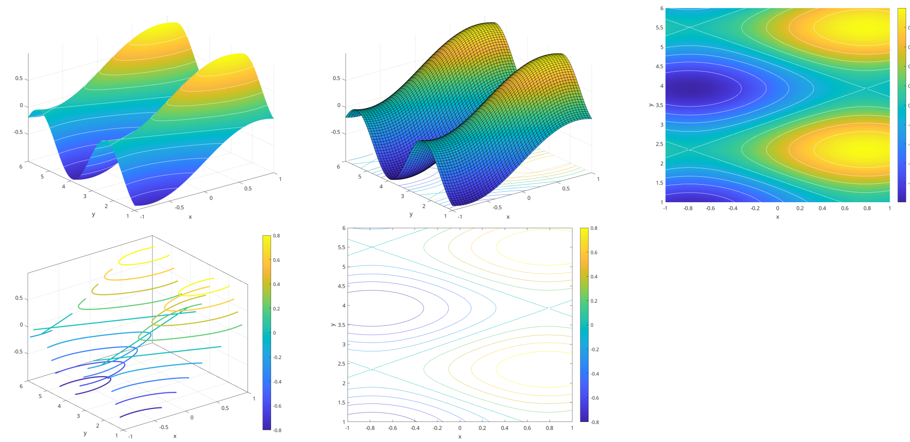


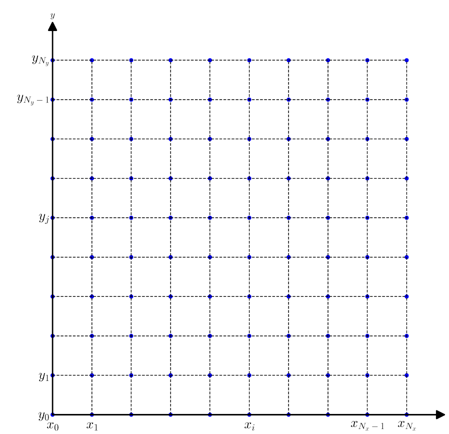
Figure – Utilisation des fonctions surf, surfc, pcolor, contour et contour3

Plan

$\Omega =]a,b[\times]c,d[\subset \mathbb{R}^2$ et $\Gamma = \Gamma_N \cup \Gamma_S \cup \Gamma_O \cup \Gamma_E = \partial\Omega$

$$-\Delta u = f \text{ dans } \Omega \quad (1)$$

$$\forall k \in \{N,S,O,E\}, \quad u = g_k, \text{ sur } \Gamma_k. \quad (2)$$



- (1) sur les points intérieurs $\Rightarrow$ $\forall (i,j) \in]\!]0,N_x[\![\times]\!]0,N_y[\![$

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,y_j) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i,y_j)\right) = f(x_i,y_j) \quad (3)$$

- (2) sur les points extérieurs $\Rightarrow$

$$u(a,y_j) = g_O(a,y_j), \quad \forall j \in [\![0,N_y]\!], \quad (4)$$
$$u(b,y_j) = g_E(b,y_j), \quad \forall j \in [\![0,N_y]\!], \quad (5)$$
$$u(x_i,c) = g_S(x_i,c), \quad \forall i \in [\![0,N_x]\!], \quad (6)$$
$$u(x_i,d) = g_N(x_i,d), \quad \forall i \in [\![0,N_x]\!]. \quad (7)$$

Conditions de compatibilité :

$$g_O(a,c) = g_S(a,c), \quad g_S(b,c) = g_E(b,c)$$
$$g_E(b,d) = g_N(b,d), \quad g_N(a,d) = g_O(a,d).$$

Equation écrite en un point intérieur

On a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,y_j)=\frac{u(x_{i+1},y_j)-2u(x_i,y_j)+u(x_{i-1},y_j)}{h_x^2}+\mathcal{O}(h_x^2),\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i,y_j)=\frac{u(x_i,y_{j+1})-2u(x_i,y_j)+u(x_i,y_{j-1})}{h_y^2}+\mathcal{O}(h_y^2)$$

et (3) se réécrit au point intérieur (x_i,y_j) avec $(i,j)\in]\!]0,N_x[\![\times]\!]0,N_y[\![$,

$$-\frac{u(x_{i+1},y_j)-2u(x_i,y_j)+u(x_{i-1},y_j)}{h_x^2}-\frac{u(x_i,y_{j+1})-2u(x_i,y_j)+u(x_i,y_{j-1})}{h_y^2}+\mathcal{O}(h_x^2)+\mathcal{O}(h_y^2)=f(x_i,y_j).$$

En "oubliant" les termes en $\mathcal{O}(h_x^2)$ et $\mathcal{O}(h_y^2)$ on obtient des équations approchées.
On note alors $U_{i,j}$ (en espérant $U_{i,j}\approx u(x_i,y_j)$!) les solutions de

$$-\frac{U_{i+1,j}-2U_{i,j}+U_{i-1,j}}{h_x^2}-\frac{U_{i,j+1}-2U_{i,j}+U_{i,j-1}}{h_y^2}=f(x_i,y_j),\quad \forall (i,j)\in]\!]0,N_x[\![\times]\!]0,N_y[\![,$$

En posant $\beta_x=\frac{-1}{h_x^2}$, $\beta_y=\frac{-1}{h_y^2}$, $\mu=\frac{2}{h_x^2}+\frac{2}{h_y^2}$.
$(E_{i,j})$ ☞ équation portée par le point (x_i,y_j)

$$\beta_x(U_{i+1,j}+U_{i-1,j})+\beta_y(U_{i,j+1}+U_{i,j-1})+\mu U_{i,j}=f_{i,j}. \qquad (E_{i,j})$$

$$\begin{aligned}
\beta_x(U_{i+1,j}+U_{i-1,j})+\beta_y(U_{i,j+1}+U_{i,j-1})+\mu U_{i,j}&=f_{i,j}, && \forall (i,j)\in]\!]0,N_x[\![\times]\!]0,N_y[\![, && (E_{i,j})\\
U_{0,j}&=g_O(a,y_j), && \forall j\in [\![0,N_y]\!], && (E_{0,j})\\
U_{N_x,j}&=g_E(b,y_j), && \forall j\in [\![0,N_y]\!], && (E_{N_x,j})\\
U_{i,0}&=g_S(x_i,c), && \forall i\in [\![0,N_x]\!], && (E_{i,0})\\
U_{i,N_y}&=g_N(x_i,d), && \forall i\in [\![0,N_x]\!]. && (E_{i,N_y})
\end{aligned}$$

avec $\beta_x=\frac{-1}{h_x^2}$, $\beta_y=\frac{-1}{h_y^2}$, $\mu=\frac{2}{h_x^2}+\frac{2}{h_y^2}$ et en espérant $U_{i,j}\approx u(x_i,y_j)$!

$(E_{i,j})$ ☞ équation portée par le point (x_i,y_j)

Q. 4

Déterminer

1. *les conditions de compatibilité ?*
2. *le nombre d'équations et le nombre d'inconnues ?*

Système linéaire

$$\begin{aligned}
\beta_x(U_{i+1,j}+U_{i-1,j})+\beta_y(U_{i,j+1}+U_{i,j-1})+\mu U_{i,j}&=f_{i,j}, && \forall (i,j)\in]\!]0,N_x[\![\times]\!]0,N_y[\![, && (E_{i,j})\\
U_{0,j}&=g_O(a,y_j), && \forall j\in]\!]0,N_y[\![, && (E_{0,j})\\
U_{N_x,j}&=g_E(b,y_j), && \forall j\in]\!]0,N_y[\![, && (E_{N_x,j})\\
U_{i,0}&=g_S(x_i,c), && \forall i\in [\![0,N_x]\!], && (E_{i,0})\\
U_{i,N_y}&=g_N(x_i,d), && \forall i\in [\![0,N_x]\!]. && (E_{i,N_y})
\end{aligned}$$

avec $\beta_x=\frac{-1}{h_x^2}$, $\beta_y=\frac{-1}{h_y^2}$, $\mu=\frac{2}{h_x^2}+\frac{2}{h_y^2}$ et en espérant $U_{i,j}\approx u(x_i,y_j)$!
On note $n_x=N_x+1$, $n_y=N_y+1$ et $N=n_xn_y$.
$\forall (i,j)\in [\![0,N_x]\!]\times[\![0,N_y]\!]$, $(E_{i,j})$, système linéaire de N équations à N inconnues :

$$\Big(\forall (i,j)\in [\![0,N_x]\!]\times[\![0,N_y]\!],\ (E_{i,j})\Big)\Leftrightarrow \mathbb{A}\boldsymbol{V}=\boldsymbol{b},\quad \text{avec } \mathbb{A}\in\mathcal{M}_N(\mathbb{R}),\ \boldsymbol{V}\in\mathbb{R}^N, \boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^N. \qquad (8)$$

Les inconnues $(U_{i,j})$ doivent être décrites sous la forme d'un vecteur $\boldsymbol{V}\in\mathbb{R}^N$!

Numérotations

Les inconnues $(U_{i,j})\approx u(x_i,y_j)$, sont en numérotation dites **mathématique** ou **2D** du TP.
Ecriture en numérotation dites **vectoriel** ou **global** du TP : le choix n'est pas unique !
On choisit

$$\boldsymbol{V}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{U}_{:,0}\\ \hline \boldsymbol{U}_{:,1}\\ \hline \vdots\\ \hline \vdots\\ \hline \boldsymbol{U}_{:,N_y}\end{pmatrix}\quad \text{où } \boldsymbol{U}_{:,j}=\begin{pmatrix}U_{0,j}\\ \vdots\\ U_{N_x,j}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n_x},\ \forall j\in[\![0,N_y]\!].$$

Il existe une bijection $\mathcal{F}:[\![0,N_x]\!]\times[\![0,N_y]\!]\longrightarrow[\![1,N]\!]$ telle que

$$\forall (i,j)\in[\![0,N_x]\!]\times[\![0,N_y]\!],\quad V_k=U_{i,j},\quad \text{avec } k=\mathcal{F}(i,j).$$

$k\in[\![1,N]\!]$ correspond à la numérotation dites **globale** dans le TP.

Q. 5 *Déterminer la bijection $\mathcal{F} : [\![0, N_x]\!] \times [\![0, N_y]\!] \longrightarrow [\![1, N]\!]$ et sa réciproque telle que*

$$\forall (i,j) \in [\![0, N_x]\!] \times [\![0, N_y]\!], \quad V_k = U_{i,j}, \quad \text{avec } k = \mathcal{F}(i,j).$$

$$\boldsymbol{V} = \begin{array}{r}n_x\\ n_x\\ \\ n_x\\ \\ n_x\end{array}\begin{pmatrix} \boldsymbol{U}_{:,0} \\ \boldsymbol{U}_{:,1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{U}_{:,j} \\ \vdots \\ \boldsymbol{U}_{:,N_y} \end{pmatrix} = \begin{array}{r} 1 \\ \vdots \\ n_x \\ n_x+1 \\ \vdots \\ 2n_x \\ \vdots \\ jn_x+1 \\ \vdots \\ (j+1)n_x \\ \vdots \\ N_y n_x+1 \\ \vdots \\ (N_y+1)n_x \end{array}\begin{pmatrix} U_{0,0} \\ \vdots \\ U_{N_x,0} \\ U_{0,1} \\ \vdots \\ U_{N_x,1} \\ \vdots \\ U_{0,j} \\ \vdots \\ U_{N_x,j} \\ \vdots \\ U_{0,N_y} \\ \vdots \\ U_{N_x,N_y} \end{pmatrix}$$

- L'indice global du dernier élément du bloc $\boldsymbol{U}_{:,j}$: $(j+1)n_x$
-
$$\begin{array}{rccc} \mathcal{F} & : & [\![0, N_x]\!] \times [\![0, N_y]\!] & \longrightarrow & [\![0, N]\!] \\ & & (i,j) & \longmapsto & jn_x + i + 1 \end{array} \tag{9}$$
- Pour déterminer $\mathcal{F}^{-1}$: soit $k \in [\![1, N]\!]$, on a

$$k = \mathcal{F}(i,j) \Leftrightarrow k - 1 = jn_x + i$$

Division Euclidienne de $k-1$ par n_x : j quotient, i reste.

$$i = (k-1) \mod n_x, \quad \text{et} \quad j = E(\frac{k-1}{n_x})$$

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{F}^{-1} & : & [\![0, N]\!] & \longrightarrow & [\![0, N_x]\!] \times [\![0, N_y]\!] \\ & & k & \longmapsto & \big((k-1) \mod n_x, E(\frac{k-1}{n_x})\big) \end{array} \tag{10}$$


```
function k=bijF(i,j,nx)
  % i in [0,nx[, j in [0,ny[
  % k in [1,nx*ny]
  k=j*nx+i+1;
end
```

```
function [i,j]=bijRecF(k,nx)
% k in [1,nx*ny] avec k-1=j*nx+i
%   division euclidienne de k-1 par nx
%   reste: i in [0,nx[,
%   quotient: j in [0,ny[
  i=rem(k-1,nx);   % ou mod(k-1,nx)
  j=floor((k-1)/nx); % ou (k-1-i)/nx
end
```

Q. 6 *Que font les programmes suivants*

Listing – Fichier `bijection00.m`

```
clear all;close all
Nx=4;Ny=5;I=0:Nx;J=0:Ny;
E=0;
for j=0:Ny
  for i=0:Nx
    k=bijF(i,j,Nx+1);
    [ii,jj]=bijRecF(k,Nx+1);
    E=E+abs(ii-i)+abs(jj-j);
  end
end
fprintf('Error : %g\n',E)
```

Listing – Fichier `bijection01.m`

```
clear all;close all
Nx=4;Ny=5;
I=0:Nx;J=0:Ny;
k=bijF(I',J,Nx+1);
k=k(:)';
Ii=1:Nx-1;Ji=1:Ny-1;
ki=reshape(bijF(Ii',Ji,Nx+1),1,[]);
```

Listing – Fichier `bijection03.m`

```
clear all;close all
Nx=4;Ny=5;I=0:Nx;J=0:Ny;
k=1:(Nx+1)*(Ny+1);
[i,j]=bijRecF(k,Nx+1);
kk=bijF(i,j,Nx+1);
E=sum(abs(k-kk));
fprintf('Error : %g\n',E)
```


Ecriture bloc

$$\mathbb{A}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{b}, \quad \text{avec } \mathbb{A} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}), \ \boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^N, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^N \tag{8}$$

Ecriture $n_y \times n_y$ blocs carrés de $\mathcal{M}_{n_x}(\mathbb{R})$:

$$\mathbb{A}\boldsymbol{V} = \begin{array}{c} \\ n_x \\ \\ n_x \\ \\ n_x \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} n_x & & n_x & & n_x \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \mathbb{A}_{0,0} & \cdots & \mathbb{A}_{0,r} & \cdots & \mathbb{A}_{0,N_y} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \hline \mathbb{A}_{r,0} & \cdots & \mathbb{A}_{r,r} & \cdots & \mathbb{A}_{r,N_y} \\ \hline \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \mathbb{A}_{N_y,0} & \cdots & \mathbb{A}_{N_y,r} & \cdots & \mathbb{A}_{N_y,N_y} \end{array}\right) \end{array} \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}_{:,0} \\ \vdots \\ \boldsymbol{U}_{:,r} \\ \vdots \\ \boldsymbol{U}_{:,N_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_0 \\ \vdots \\ \boldsymbol{B}_r \\ \vdots \\ \boldsymbol{B}_{N_y} \end{pmatrix} = \boldsymbol{B} \tag{11}$$

Choix écriture $(E_{i,j})$ dans (11) ☞ ligne $k = \mathcal{F}(i,j)$

Produit matriciel bloc avec les notations proposées :

$$\forall r \in [\![0, N_y]\!], \quad \boldsymbol{B}_r = \sum_{s=0}^{N_y} \mathbb{A}_{r,s}\boldsymbol{U}_{:,s}.$$

$$\mathbb{A}\boldsymbol{V} = \begin{array}{c} \\ n_x \\ \\ n_x \\ \\ n_x \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} n_x & & n_x & & n_x \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \mathbb{A}_{0,0} & \cdots & \mathbb{A}_{0,r} & \cdots & \mathbb{A}_{0,N_y} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \hline \mathbb{A}_{r,0} & \cdots & \mathbb{A}_{r,r} & \cdots & \mathbb{A}_{r,N_y} \\ \hline \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \mathbb{A}_{N_y,0} & \cdots & \mathbb{A}_{N_y,r} & \cdots & \mathbb{A}_{N_y,N_y} \end{array}\right) \end{array} \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}_{:,0} \\ \vdots \\ \boldsymbol{U}_{:,r} \\ \vdots \\ \boldsymbol{U}_{:,N_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_0 \\ \vdots \\ \boldsymbol{B}_r \\ \vdots \\ \boldsymbol{B}_{N_y} \end{pmatrix} = \boldsymbol{B} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \beta_x(U_{i+1,j} + U_{i-1,j}) + \beta_y(U_{i,j+1} + U_{i,j-1}) + \mu U_{i,j} &= f_{i,j}, & \forall (i,j) \in]\!]0, N_x[\![\times]\!]0, N_y[\![, \quad & (E_{i,j}) \\ U_{0,j} &= g_O(x_0, y_j), & \forall j \in]\!]0, N_y[\![, \quad & (E_{0,j}) \\ U_{N_x,j} &= g_E(x_{N_x}, y_j), & \forall j \in]\!]0, N_y[\![, \quad & (E_{N_x,j}) \\ U_{i,0} &= g_S(x_i, y_0), & \forall i \in [\![0, N_x]\!], \quad & (E_{i,0}) \\ U_{i,N_y} &= g_N(x_i, y_{N_y}), & \forall i \in [\![0, N_x]\!]. \quad & (E_{i,N_y}) \end{aligned}$$

avec $\beta_x = \frac{-1}{h_x^2}$, $\beta_y = \frac{-1}{h_y^2}$, $\mu = \frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2}$

Choix écriture $(E_{i,j})$ dans (11) ☞ ligne $k = \mathcal{F}(i,j) = jn_x + i + 1$

Q. 7
1. *Expliciter la première et la dernière ligne bloc de (11) (i.e. ligne bloc $r = 0$ et $r = N_y$).*
2. *Expliciter la ligne bloc r de (11) pour $r \in [\![0, Ny-1]\!]$.*

$\mathbb{A}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{B}$ s'écrit donc sous forme bloc

$$\begin{pmatrix}
\mathbb{I} & \mathbb{O} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{O}\\
\mathbb{M} & \mathbb{D} & \mathbb{M} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{O}\\
\mathbb{O} & \mathbb{M} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\
\vdots & \mathbb{O} & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbb{O} & \vdots\\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbb{M} & \mathbb{O}\\
\mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{M} & \mathbb{D} & \mathbb{M}\\
\mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{I}
\end{pmatrix} \boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_0 \\ \boldsymbol{B}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \boldsymbol{B}_{N_y-1} \\ \boldsymbol{B}_{N_y} \end{pmatrix} \quad (12)$$

avec $\beta_x = \frac{-1}{h_x^2}$, $\beta_y = \frac{-1}{h_y^2}$, $\mu = \frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2}$,

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\
\beta_x & \mu & \beta_x & 0 & \cdots & 0\\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\
0 & \cdots & 0 & \beta_x & \mu & \beta_x\\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1
\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n_x}(\mathbb{R}),$$

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix}
0 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\
0 & \beta_y & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\
\vdots & & \ddots & \ddots & 0\\
0 & \cdots & 0 & \beta_y & 0\\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0
\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n_x}(\mathbb{R}),$$

$$\boldsymbol{B}_0 = \begin{pmatrix} g_S(x_0, y_0) \\ \vdots \\ g_S(x_{N_x}, y_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_x}, \quad \boldsymbol{B}_{N_y} = \begin{pmatrix} g_N(x_0, y_{N_y}) \\ \vdots \\ g_N(x_{N_x}, y_{N_y}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_x},$$

$$\forall r \in]\!]0, N_y[\![, \quad \boldsymbol{B}_r = \begin{pmatrix} g_O(x_0, y_r) \\ f(x_1, y_r) \\ \vdots \\ f(x_{N_x-1}, y_r) \\ g_E(x_{N_x}, y_r) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_x}.$$

Plan

Méthode bloc

$\mathbb{A}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{B}$ s'écrit donc sous forme bloc

$$\begin{pmatrix}
\mathbb{I} & \mathbb{O} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{O}\\
\mathbb{M} & \mathbb{D} & \mathbb{M} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{O}\\
\mathbb{O} & \mathbb{M} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\
\vdots & \mathbb{O} & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbb{O} & \vdots\\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbb{M} & \mathbb{O}\\
\mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{M} & \mathbb{D} & \mathbb{M}\\
\mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{I}
\end{pmatrix} \boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_0 \\ \boldsymbol{B}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \boldsymbol{B}_{N_y-1} \\ \boldsymbol{B}_{N_y} \end{pmatrix} \quad (13)$$

avec $\beta_x = \frac{-1}{h_x^2}$, $\beta_y = \frac{-1}{h_y^2}$, $\mu = \frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2}$,

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\
\beta_x & \mu & \beta_x & 0 & \cdots & 0\\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\
0 & \cdots & 0 & \beta_x & \mu & \beta_x\\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1
\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n_x}(\mathbb{R}),$$

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix}
0 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\
0 & \beta_y & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\
\vdots & & \ddots & \ddots & 0\\
0 & \cdots & 0 & \beta_y & 0\\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0
\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n_x}(\mathbb{R}),$$

$$\boldsymbol{B}_0 = \begin{pmatrix} g_S(x_0, y_0) \\ \vdots \\ g_S(x_{N_x}, y_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_x}, \quad \boldsymbol{B}_{N_y} = \begin{pmatrix} g_N(x_0, y_{N_y}) \\ \vdots \\ g_N(x_{N_x}, y_{N_y}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_x},$$

$$\forall r \in]\!]0, N_y[\![, \quad \boldsymbol{B}_r = \begin{pmatrix} g_O(x_0, y_r) \\ f(x_1, y_r) \\ \vdots \\ f(x_{N_x-1}, y_r) \\ g_E(x_{N_x}, y_r) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_x}.$$

Q. 8 *Proposer un algorithme permettant de créer la matrice $\mathbb{A}$ et le vecteur $\boldsymbol{B}$ en utilisant la structure bloc.*

Méthode bloc

- **Avantages**
  - algorithmes assez simples,
  - vectorisation possible,
  - ...
- **Inconvénients**
  - il faut impérativement avoir écrit le système bloc en détail,
  - passage en 3D,

Méthode bijection

$$\mathbb{A}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{B} \qquad \text{avec } \boldsymbol{V}_{\mathcal{F}(i,j)} = U_{i,j},\ \forall (i,j) \in [\![0, N_x]\!] \times [\![0, N_y]\!] \tag{11}$$

$$\beta_x(U_{i+1,j} + U_{i-1,j}) + \beta_y(U_{i,j+1} + U_{i,j-1}) + \mu U_{i,j} = f(x_i, y_j),\quad \forall (i,j) \in]\!]0, N_x[\![\times]\!]0, N_y[\![, \quad +\text{C.L.} \tag{$E_{i,j}$}$$

avec $\beta_x = \frac{-1}{h_x^2}$, $\beta_y = \frac{-1}{h_y^2}$, $\mu = \frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2}$

Choix écriture $(E_{i,j})$ dans (11) ☞ **ligne $k = \mathcal{F}(i,j) = jn_x + i + 1$**

Q. 9 *Proposer un algorithme permettant de créer la matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ et le second membre $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^N$ sans tenir compte des conditions aux limites (i.e. les lignes correspondantes sont laissées à zéros)*

Soit $(i,j) \in]\!]0, N_x[\![\times]\!]0, N_y[\![$ et $k = \mathcal{F}(i,j)$. La ligne k du système est donc

$$\beta_x(V_{\mathcal{F}(i+1,j)} + V_{\mathcal{F}(i-1,j)}) + \beta_y(V_{\mathcal{F}(i,j+1)} + V_{\mathcal{F}(i,j-1)}) + \mu V_{\mathcal{F}(i,j)} = f(x_i, y_j)$$

$$\beta_x(V_{k+1} + V_{k-1}) + \beta_y(V_{k+n_x} + V_{k-n_x}) + \mu V_k = f(x_i, y_j)$$

$$(\mathbb{A}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{B})_k \Leftrightarrow \sum_{r=1}^{N} \mathbb{A}_{k,r} V_r = B_k \Leftrightarrow \begin{cases} \forall r \in [\![1, N]\!] \backslash \{k-n_x, k-1, k, k+1, k+n_x\},\ \mathbb{A}_{k,r} = 0, \\ \mathbb{A}_{k,k+1} V_{k+1} + \mathbb{A}_{k,k-1} V_{k-1} + \mathbb{A}_{k,k+n_x} V_{k+n_x} + \mathbb{A}_{k,k-n_x} V_{k-n_x} + \mu \mathbb{A}_{k,k} V_k = B_k \end{cases}$$

$$\mathbb{A}_{k,k-1} = \mathbb{A}_{k,k+1} = \beta_x,\quad \mathbb{A}_{k,k-n_x} = \mathbb{A}_{k,k+n_x} = \beta_y,\quad \mathbb{A}_{k,k} = \mu,\quad \text{sinon } \mathbb{A}_{k,r} = 0$$
$$B_k = f(x_i, y_j),\quad \text{où } k = \mathcal{F}(i,j),\ \text{et } (i,j) \in]\!]0, N_x[\![\times]\!]0, N_y[\![$$

Méthode bijection

$$\mathbb{A}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{B} \qquad \text{avec } \boldsymbol{V}_{\mathcal{F}(i,j)} = U_{i,j},\ \forall (i,j) \in [\![0, N_x]\!] \times [\![0, N_y]\!] \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
\beta_x(U_{i+1,j} + U_{i-1,j}) + \beta_y(U_{i,j+1} + U_{i,j-1}) + \mu U_{i,j} &= f(x_i, y_j), & \forall (i,j) \in]\!]0, N_x[\![\times]\!]0, N_y[\![, && (E_{i,j})\\
U_{0,j} &= g_O(x_0, y_j), & \forall j \in]\!]0, N_y[\![, && (E_{0,j})\\
U_{N_x,j} &= g_E(x_{N_x}, y_j), & \forall j \in]\!]0, N_y[\![, && (E_{N_x,j})\\
U_{i,0} &= g_S(x_i, y_0), & \forall i \in [\![0, N_x]\!], && (E_{i,0})\\
U_{i,N_y} &= g_N(x_i, y_{N_y}), & \forall i \in [\![0, N_x]\!]. && (E_{i,N_y})
\end{aligned}$$

avec $\beta_x = \frac{-1}{h_x^2}$, $\beta_y = \frac{-1}{h_y^2}$, $\mu = \frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2}$

Choix écriture $(E_{i,j})$ dans (11) ☞ **ligne $k = \mathcal{F}(i,j) = jn_x + i + 1$**

Q. 10 *Proposer un algorithme permettant de créer la matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ et le second membre $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^N$ en ne tenant compte que des conditions aux limites (i.e. les lignes correspondant aux points intérieurs sont laissées à zéros)*

Méthode bijection

- **Avantages**
  - pas nécessaire d'avoir l'écriture bloc,
  - algorithmes simples,
  - vectorisation possible,
  - passage en 3D,
  - ...
- **Inconvénients**
  - *cache* la structure de la matrice
  - ...