

# Rapport TP1

Jean-Marie Nonhouéno Agoundo — Sup Galilée

## 1 Question 2a – Méthodologie de calcul des aires

Pour chaque triangle  $K_k$  du maillage, on considère ses trois sommets  $q_0, q_1, q_2$ . La transformation affine

$$F_K(\hat{q}) = A_K \hat{q} + q_0, \quad \text{avec} \quad A_K = (q_1 - q_0 \mid q_2 - q_0),$$

envoie le triangle de référence  $\hat{K}$  sur le triangle  $K$ . On part de la formule de changement de variables reliant un triangle  $K$  et le triangle de référence  $\hat{K}$  :

$$\int_K f(q) dq = |\det(A_K)| \int_{\hat{K}} f(F_K(\hat{q})) d\hat{q},$$

où  $F_K(\hat{q}) = A_K \hat{q} + q_0$  avec

$$A_K = (q_1 - q_0 \mid q_2 - q_0).$$

En prenant  $f = \mathbf{1}_K$ , la fonction indicatrice du triangle  $K$ , on obtient :

$$\lambda(K) = \int_K 1 dq = |\det(A_K)| \int_{\hat{K}} 1 d\hat{q} = |\det(A_K)| \lambda(\hat{K}).$$

Comme l'aire du triangle de référence vaut  $\lambda(\hat{K}) = \frac{1}{2}$ , on déduit :

$$\boxed{\lambda(K) = \frac{1}{2} |\det(A_K)|.}$$

Ainsi, pour chaque triangle  $K_k$ ,  $k = 1, \dots, n_{me}$ , du maillage défini par ses sommets  $q_0, q_1, q_2$ , on calcule :

$$\text{areas}(k) = \frac{1}{2} |\det(A_K)|.$$

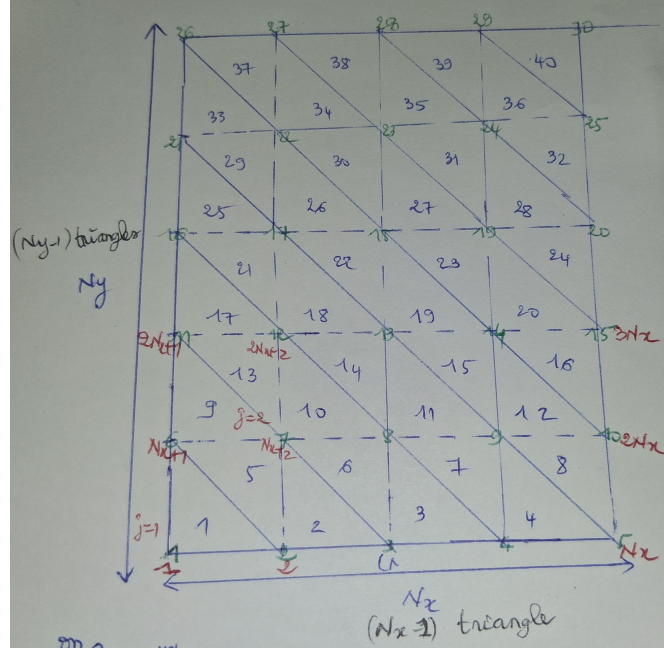
En parcourant l'ensemble des triangles à partir des tableaux des points  $q$  et de connectivité  $me$ , on construit le tableau **areas** contenant l'aire de chaque élément.

## 2 Question 3a – Maillage unit-square

**Tableau q.** Pour commencer, je crée deux vecteurs de grille  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  avec `linspace` sur l'intervalle  $[0, 1]$ . L'idée est ensuite de parcourir toutes les lignes du maillage : pour chaque valeur de  $y(j)$ , je balaie toutes les positions  $x(i)$  correspondantes, et j'enregistre les coordonnées du point courant dans le tableau **q** :

$$q(:, k) = [x(i) ; y(j)].$$

L'indice  $k$  est incrémenté à chaque itération, ce qui permet de remplir **q** ligne par ligne. À la fin de la double boucle, on obtient ainsi l'ensemble des coordonnées des nœuds du carré unité.



**FIGURE 1** – Numérotation des points et formation des triangles du carré unité.

**Tableau me.** En observant la Figure 1, on voit que les points du maillage sont numérotés ligne par ligne, de gauche à droite puis de bas en haut. Chaque petit carré est donc défini par quatre points consécutifs dont les indices se déduisent facilement à partir de cette numérotation.

Dans le code, la variable `indice` indique le premier point de la bande horizontale courante. Pour chaque position  $i$ , on repère alors les quatre sommets du carré :

$$p_{00} = \text{indice} + i, \quad p_{10} = \text{indice} + i + 1, \quad p_{11} = \text{indice} + N_x + i + 1, \quad p_{01} = \text{indice} + N_x + i.$$

Chaque carré est ensuite divisé en deux triangles selon la diagonale reliant les points  $(i, j)$  et  $(i + 1, j + 1)$  :

$$\text{triangle inférieur} : [p_{00}, p_{10}, p_{11}], \quad \text{triangle supérieur} : [p_{00}, p_{11}, p_{01}].$$

Concrètement, dans la boucle, je commence par générer tous les triangles inférieurs, puis les triangles supérieurs correspondants pour la même bande. À chaque itération, une colonne de `me` est remplie avec les indices des trois sommets du triangle courant. Une fois la bande terminée, `indice` est incrémenté de  $N_x$  pour passer à la suivante. Cette logique permet de parcourir tout le maillage et de construire progressivement la matrice `me`, chaque colonne correspondant à un triangle.

### 3 Question 4a - rectangle sur $[a, b] \times [c, d]$ .

Le maillage du rectangle  $[a, b] \times [c, d]$  s'obtient par l'application affine du carré unité  $[0, 1]^2$  :

$$F(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} a + (b - a)x_0 \\ c + (d - c)y_0 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$\begin{aligned} a + (b - a)x_0 &= a & \text{si } x_0 = 0, \\ a + (b - a)x_0 &= b & \text{si } x_0 = 1, \\ c + (d - c)y_0 &= c & \text{si } y_0 = 0, \\ c + (d - c)y_0 &= d & \text{si } y_0 = 1. \end{aligned}$$

Les images des sommets du carré unité sont :

$$F(0,0) = (a,c), \quad F(1,0) = (b,c), \quad F(0,1) = (a,d), \quad F(1,1) = (b,d),$$

ce qui correspond exactement aux quatre sommets du rectangle  $[a,b] \times [c,d]$ .

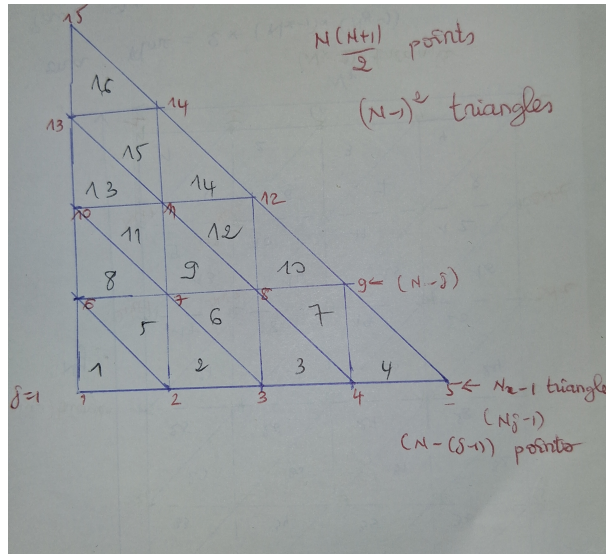
Ainsi, si `[q0,me] = meshes.unitsquare(Nx,Ny)`, on obtient pour les coordonnées du maillage :

$$q(1,:) = a + (b - a)q0(1,:), \quad q(2,:) = c + (d - c)q0(2,:).$$

La connectivité `me` reste inchangée.

Ainsi, l'application affine  $F$  transforme bien le carré unité  $[0,1]^2$  en le rectangle  $[a,b] \times [c,d]$  sans modifier la connectivité du maillage.

## 4 Question 5a - unittriangle(N)



**FIGURE 2** – Numérotation des points et formation des triangles du carré unité du triangle unité.

**1. Sommets  $q$**  À la ligne  $j$  ( $1 \leq j \leq N$ ), on place  $N - (j - 1)$  points. Ainsi :

$$n_q = \sum_{j=1}^N [N - (j - 1)] = \frac{N(N + 1)}{2}.$$

Pour obtenir les coordonnées de tous les points du maillage, je commence par créer deux vecteurs  $x$  et  $y$  entre 0 et 1 avec `linspace`. Chaque ligne  $j$  du triangle contient alors  $N - (j - 1)$  points.

La double boucle sert à parcourir l'ensemble de ces lignes. Pour chaque valeur de  $j$ , je fais varier  $i$  de 1 jusqu'à  $N - (j - 1)$ , et j'enregistre les coordonnées du point courant dans  $q$  sous la forme :

$$q(:, k) = [x(i); y(j)].$$

L'indice  $k$  est ensuite augmenté de 1 pour passer au point suivant. À la fin de la boucle,  $q$  contient toutes les coordonnées des nœuds du maillage, rangées dans l'ordre où elles ont été générées.

**2. Connectivité me** Entre les lignes  $j$  et  $j + 1$ , on note

$$n_{\text{points}} = N - (j - 1)$$

le nombre de points présents sur la ligne  $j$ .

Après le traitement de chaque bande, l'indice de départ est incrémenté de  $n_{\text{points}}$ . Le nombre total d'éléments obtenus dans le maillage est alors donné par :

$$\begin{aligned} n_{me} &= \sum_{j=1}^{N-1} [2(N - j) - 1] \\ &= (N - 1)^2, \quad \text{car pour chaque } j, \text{ il y a } (N - j) \text{ triangles inférieurs} \\ &\quad \text{et } (N - j - 1) \text{ triangles supérieurs.} \end{aligned}$$

Ma démarche consiste à considérer le nombre total de points du maillage, puis à parcourir les lignes successivement afin de former les triangles dans l'ordre souhaité sur la figure.

Pour chaque valeur de  $j$ , je détermine le nombre de points sur la ligne considérée :

$$n_{\text{points}} = N - (j - 1).$$

Je parcours ensuite tous les indices  $i$  pour construire les  $n_{\text{points}} - 1$  triangles inférieurs, définis par :

$$[\text{indice} + i, \text{indice} + i + 1, \text{indice} + n_{\text{points}} + i] \quad (\text{triangle inférieur}).$$

Ensuite, je forme les  $n_{\text{points}} - 2$  triangles supérieurs selon la relation :

$$[\text{indice} + i + 1, \text{indice} + n_{\text{points}} + i + 1, \text{indice} + n_{\text{points}} + i] \quad (\text{triangle supérieur}).$$

L'indice de départ est enfin mis à jour à la fin de chaque bande de la manière suivante :

$$\text{indice} = \text{indice} + n_{\text{points}}.$$

Ainsi, l'ensemble des triangles est construit ligne par ligne.

## 5 Question 6a - triangle.

Le maillage d'un triangle quelconque  $K$  de sommets  $q_0, q_1, q_2$  est obtenu à partir du maillage du triangle de référence  $\hat{K}$  grâce à la transformation affine :

$$F_K(\hat{q}) = q_0 + (q_1 - q_0)\hat{x} + (q_2 - q_0)\hat{y}, \quad \text{avec} \quad \hat{q} = (\hat{x}, \hat{y}).$$

Dans le code, cette relation est appliquée à tous les points du maillage de référence `[q_unit, me] = meshes.unittriangle(N)` pour produire les coordonnées du triangle réel ( `[q,me]=triangle(q0,q1,q2,N)` ) avec :

$$q = q_0(:) + (q_1(:) - q_0(:)) * q\_unit(1,:) + (q_2(:) - q_0(:)) * q\_unit(2,:).$$

La connectivité `me` reste inchangée.