

~ Rapport TP 01 EDP ~

Algorithmique : génération de maillages

V. Initiation

3. Calcul d'aires

L'objectif de cette question est de construire un tableau contenant l'ensemble des aires de chacun des triangles du maillage.

Pour cela on commence d'abord par écrire une fonction donnant l'aire d'un seul triangle.

- Raisonnement pour un triangle :

↳ On s'inspire de la formule pour une dimension, en effet, pour connaître la longueur d'un segment $[a, b]$, on a :

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{en prenant } f(x) = 1 \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\text{On a alors } \int_a^b f(x) dx = b - a = \text{longueur segment } [a, b].$$

↳ On fait de même avec un triangle.

On a par la formule (5)

$$\int_K f(q) dq = |\det(A_K)| \int_{\hat{K}} f \circ T_K(\hat{q}) d\hat{q}$$

Pour avoir l'aire du triangle K ,

avec \hat{K} le triangle de référence d'aire $= \frac{1}{2}$

On doit prendre $f(q) = 1 \quad \forall q \in \mathbb{R}^2$

$$\text{d'où } \text{Aire}(K) = \int_K 1 dq = |\det(A_K)| \int_{\hat{K}} 1 d\hat{q}$$

$$= \frac{1}{2} = \text{Aire}(\hat{K})$$

d'où :

$$\text{d'où } \text{Aire}(K) = |\det(A_K)| \cdot \frac{1}{2} \quad \text{avec } A_K = \begin{pmatrix} q^1 - q^0 & q^2 - q^0 \end{pmatrix}$$

↳ Pour créer un tableau contenant l'aire de chaque triangle du maillage, il suffit de faire une boucle sur le nombre de triangle, et par chacun, appliquer la formule précédente.

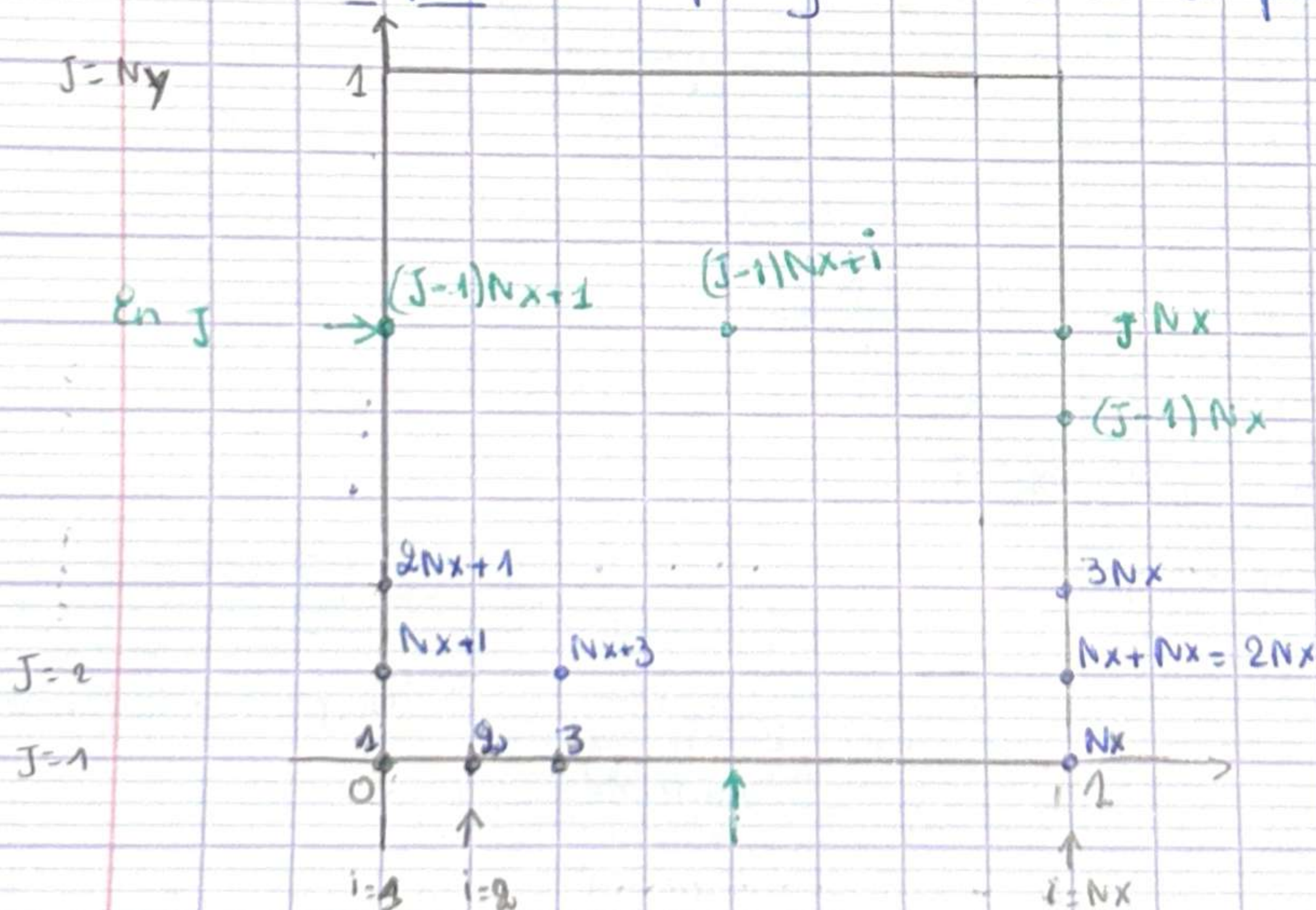
→ Voir triangle area
et mesh area

III. Generation de maillages

a) Maillage du carré unité.

On veut construire un tableau de point q et de connectivité me , associé au carré unité avec $N_x \geq 2$ et $N_y \geq 2$ avec la bonne numérotation.

• Etape 01: Remplissage du tableau de point q .



On a donc une formule pour numérotter les sommets, en effet le numéro du sommet de la ligne j et de la colonne i est donné par $k = (j-1)N_x + i$, il a donc pour coordonnées $(x(i), y(j))$

↳ Pour trouver tous les sommets et leur coordonnées, il

suffit de faire une boucle parcourant tous les points

Pour i allant de 1 à N_x

Pour j allant de 1 à N_y

...

T_{in}

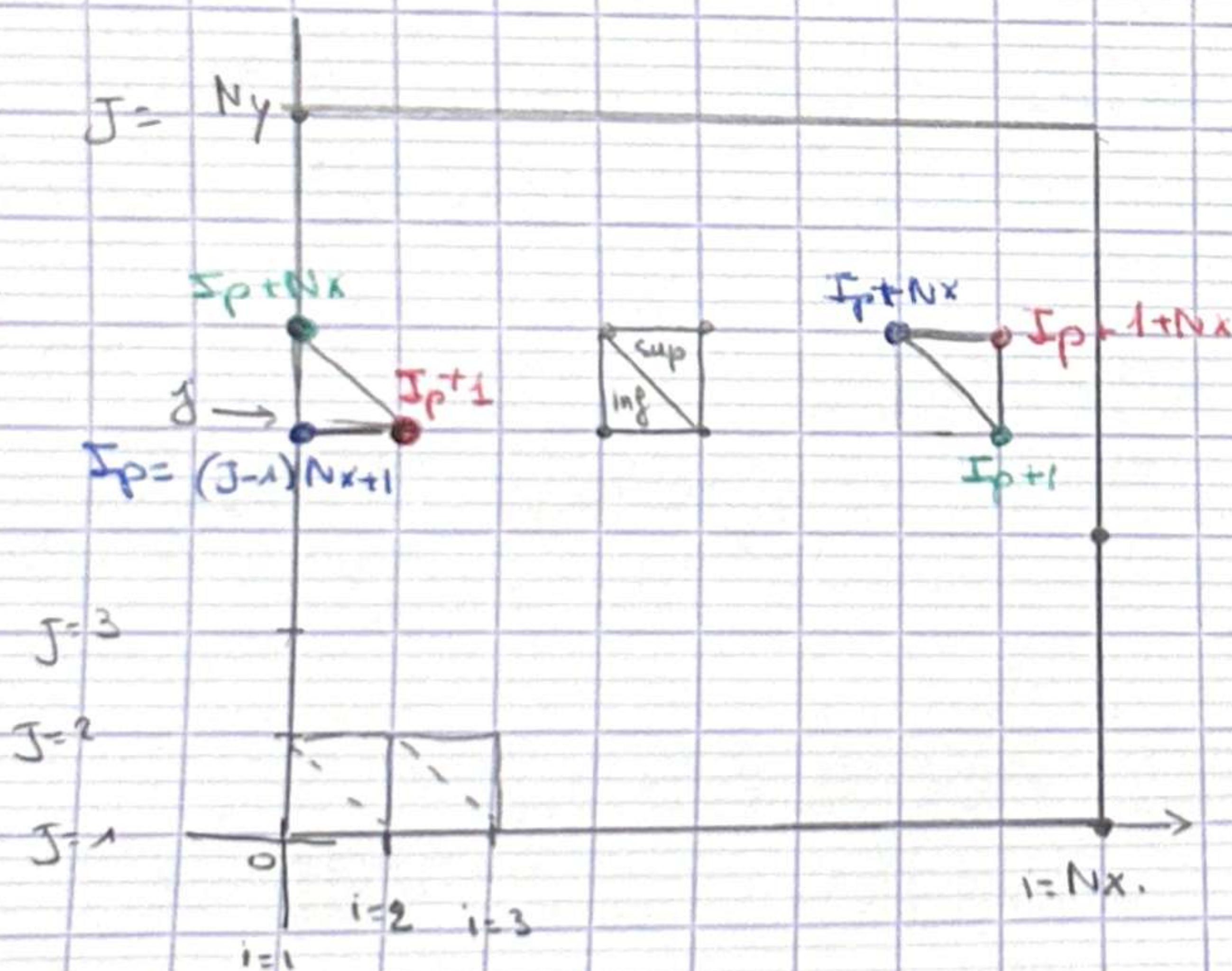
Étape 02 : Remplissage du tableau de connectivité m_e

Le nombre total de triangle est donné par

$$N_{me} = 2 \cdot (N_y - 1) \cdot (N_x - 1)$$

→ Notre objectif est de mettre dans le tableau m_e , les 3 sommets de chaque triangle.

→ On remarque que chaque case est divisée en 2 triangles (inférieurs et supérieurs).



① On commence par parcourir l'ensemble

Pour $j \leftarrow 1$ à $N_y - 1$

Pour $i \leftarrow 1$ à $N_x - 1$

② Pour chaque point, on détermine les deux triangles associés.

* Triangle inférieur

Pour le premier triangle inférieur d'une ligne j , on prend les trois sommets

- le premier point de la ligne j : $I_p = (j-1)N_x + 1$ (point initial)
- Le point à droite : I_{p+1}
- Le point au dessus : I_{p+N_x}

- On numérote alors ce triangle.
- On avance ensuite le point initial au point suivant $I_p = I_{p+1}$, et ce jusqu'à $i = N_x - 1$, et pour chaque avancée, on incrémente le numéro du triangle : $Num = Num + 1$.

* Triangle supérieur

On se fait la même méthode mais avec $I_p = (j-1)N_x + 1$ premier point de la ligne j .

- Point initial : I_{p+1} (point à droite du premier point I_p)
- Point au dessus : $I_{p+1} + N_x$
- Premier point de la ligne au dessus : $I_p + N_x$

On avance ensuite le point de position I_p au point suivant, en incrémentant la numérotation des triangles.

→ et chaque fin de parcours de toutes les colonnes, on passe à la ligne suivante et on repère le processus.

2) Rectangle $[a,b] \times [c,d]$

Afin de remplir les tableaux q et m d'un rectangle, il suffit de remarquer qu'il s'agit d'une déformation en longueur et en largeur du carré unité.

On obtient le rectangle à partir du carré unité par

$$L = (b-a) \times c + a \quad (\text{longueur})$$

$$l = (d-c) \times c + c \quad (\text{largeur}).$$

d'où $q'(1,i) = (b-a) q(1,i) + a$ ← pour les x des sommets de rectangle
 $q'(2,i) = (d-c) q(2,i) + c$ ← pour les y des sommets de rectangle

3) Triangle de reference

• Etape 01 Remplissage des sommets dans q .

On reprend la méthodologie pour le carré unité : on part du sommet 1 en L_1 .

- On parcourt les lignes j et pour chaque ligne on parcourt les colonnes i
- au point (j, i) , on affecte les coordonnées $(x(i), y(j))$
- On incrémente le numéro de sommet $k = k + 1$.

→ de la différence du carré unité, après avoir parcouru toutes les colonnes de la ligne j (de 1 à N_x), on décrémente N_x avant de passer à la ligne suivante, et la ligne $j+1$, on va donc s'arrêter à $N_x - 1$... On aura bien des sommets en triangle.

• Etape 02 : Remplissage des triangles dans me .

On reprend la même méthode que pour le carré unité.

- Seulement, le sommet initial I_p pour la ligne j est $I_p = \sum_{k=1}^{j-1} (N - k + 1)$
- De plus à la fin du remplissage des triangles inf et sup de la ligne j , on décrémente N_x
- Pour les triangles supérieurs, on s'arrête par $i = N_x - 2$.

4) Remplissage d'un triangle

Pour trouver les sommets du nouveau triangle à partir du triangle unité, on applique la formule (3) en prenant $\hat{x} = q(1, i)$
et $\hat{y} = q(2, i)$