

Ndiaye Sira
NDIAYE
MACS2

Rapport TP EDP

Q27 Par analogie avec le calcul de la longueur d'un segment $[a, b]$ où l'on calcule l'intégrale de la fonction indicatrice pour obtenir $b-a$, on étend cette approche au calcul d'aires de triangles via un changement de variable.

Soit un maillage constitué de triangles T_k , $k = 1, \dots, n_{me}$. Pour chaque triangle T du maillage, on procède comme suit :

1- Transformation affine vers le triangle de référence :

* On considère le triangle de référence \hat{T} de sommets $\hat{q}^0 = (0, 0)$, $\hat{q}^1 = (1, 0)$, $\hat{q}^2 = (0, 1)$

* On définit une transformation affine $F_k : \hat{T} \rightarrow T$ qui envoie bijectivement \hat{T} sur T :

$$F_k(\hat{q}) = q^0 + (q^1 - q^0)\hat{x} + (q^2 - q^0)\hat{y}$$

où q^0, q^1, q^2 sont les sommets de T .

2- Matrice jacobienne et déterminant :

* La matrice jacobienne de F_k est :

$$A_k = (q^1 - q^0 \mid q^2 - q^0)$$

* Son déterminant $\det(A_n)$ représente le facteur de dilatation des aires par la transformation.

3. Calcul de l'aire :

* En prenant $f = 1$ (fonction constante), l'aire de T est donnée par :

$$\begin{aligned} \text{aire}(T) &= \int_T 1 \, dq = |\det(A_n)| \int_{\hat{n}} 1 \, d\hat{q} \\ &= \frac{1}{2} |\det(A_n)| \end{aligned}$$

puisque l'aire de \hat{n} est $\frac{1}{2}$

4. Application symétrique au maillage

* Pour chaque triangle T_k du maillage, on calcule sa matrice A_k , et on déduit son aire par :

$$\text{areas}(k) = \frac{1}{2} |\det(A_k)|$$

* Les aires sont stockées dans un tableau areas de dimension $1 \times n_{me}$.

Q37 Pour générer le maillage du carré unité avec $N_x \geq 2$ points suivant x et $N_y \geq 2$ points suivant y , on procède en deux étapes.

1/ Construction du tableau de points q

• on discrétise chaque direction avec des points équidistants :

$$x_i = \frac{i-1}{N_x-1}, \quad y_j = \frac{j-1}{N_y-1}, \quad \text{pour } i=1, \dots, N_x,$$

$$j=1, \dots, N_y.$$

• La numérotation des points s'effectue ligne par ligne (pour indice j fixé, on incrémente i) : le point $k = (j-1) \times N_x + i$ a pour coordonnées (x_i, y_j)

Le tableau q est de dimension $2 \times (N_x \times N_y)$

2/ Construction du tableau de connectivité me

• Chaque cellule élémentaire $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ est divisée en deux triangles.

Pour la cellule $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, les sommets sont :

$$n_1 = (j-1) N_x + i \quad (\text{bas gauche})$$

$$n_2 = n_1 + 1 \quad (\text{bas droit})$$

$$n_3 = n_2 + N_x \quad (\text{haut gauche})$$

$$n_4 = n_3 + 1 \quad (\text{haut droit})$$

Triangle inférieur (orientation directe) : $n_1 \rightarrow n_2 \rightarrow n_3$

Triangle supérieur (orientation directe) : $n_2 \rightarrow n_4 \rightarrow n_3$

Le tableau me est de dimension $3 \times [2 \times (N_x - 1) \times (N_y - 1)]$

Q47 On applique une transformation affine au carré unité.

1/ Génération du maillage de référence
• On génère un maillage régulier du carré unité $[0,1] \times [0,1]$ avec $M_x \geq 2$ et $M_y \geq 2$

2/ Transformation affine vers le rectangle cible

• On applique une transformation linéaire indépendante dans chaque direction :

→ suivant x

$$x_{\text{nouveau}} = a + (b-a) \times x_{\text{référence}}$$

→ suivant y

$$y_{\text{nouveau}} = c + (d-c) \times y_{\text{référence}}$$

La numérotation des points et la connectivité sont identiques à celles du carré unité.

Q57

1/ Construction du tableau de points q

Les points sont organisés en lignes horizontales de bas en haut :

• La ligne j contient $(N-j)$ points à la hauteur

$$y = \frac{j}{N-1}$$

• Sur la ligne j , la i -ième point a pour coordonnées $(\frac{i}{N-1}, \frac{j}{N-1})$

Le nombre total de points est $n_q = \frac{N(N+1)}{2}$

L'algorithme s'écrit :

$k = 1$ % compteur

Pour $j = 0$ à $N-2$

Pour $i = 0$ à $(N-j-1)$:

$$q(:, k) = [i / (N-2); j / (N-2)]$$

$$k = k + 1$$

2/ Construction du tableau de connectivité

Pour chaque rangée j (entre la ligne j et $j+1$), on crée des triangles de deux types :

- Triangles "pointe en bas" : formés par les points (i, j) , $(i+2, j)$, $(i, j+1)$

- Triangles "pointe en haut" : formés par les points $(i+1, j)$, $(i+1, j+1)$, $(i, j+1)$

Le nombre total de triangles est $(N-1)^2$

Q67 On utilise une transformation affine du triangle de référence vers le triangle cible.

1/ On génère le maillage du triangle de référence (de sommets $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$)

2/ La transformation affine du triangle de référence K vers le triangle k est :

$F_k(\hat{q}) = A_k \cdot \hat{q} + q^0$ où la matrice A_k est définie par : $A_k = [q^1 - q^0 \mid q^2 - q^0]$

3/ On applique la transformation à tous les

points du maillage de référence avec
la ligne :

$$q = AK * q_{ref} + \text{repmat}(q_0, 1, nq)$$

NB : repmat permet d'ajouter q_0 à chaque
colonne de $AK \cdot q_{ref}$

1.7 Le tableau de connectivité ne
change pas ($me = me_{ref}$)

En effet, la transformation affine préserve :

- Les relations d'adjacence entre points
- L'ordre des sommets de chaque triangle
- L'orientation (sens direct)