Institut GALILÉE
Université Sorbonne Paris Nord
Ing. MACS 2

UNIVERSITÉ SORBONNE PARIS NORD
2025-2026

TPs Algo./E.D.P.

Travaux Pratiques N^o 2

Méthodes des différences finies
E.D.P.s 1D stationnaires

Version du 5 octobre 2025

Table des matières

1 Approximation de dérivées premières

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a, b]$ et suffisament régulière.

Q. 1

a. **[rapport]** *Montrer que l'on a*

$$f'(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x})}{h} + \mathcal{O}(h) \tag{1.1}$$

$$f'(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x}) - f(\bar{x}-h)}{h} + \mathcal{O}(h) \tag{1.2}$$

b. **[code]** *On note $x_i = a + ih$, $i \in [\![0, n]\!]$, une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$. Soit une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ suffisament régulière. On suppose que les y_i sont donnés par*

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{1.3}$$

Ecrire une fonction **diff**.d1fo1 *(fichier* `+diff/d1fo1.m`*) permettant de calculer des approximations d'ordre 1 de $f'(x_i)$ pour $i \in [\![0, n]\!]$.*

Pour obtenir une formule d'approximation d'ordre 2 de $f'(\bar{x})$, on suppose $f \in \mathcal{C}^3(]a, b[)$ et on peut alors développer les formules de Taylor de $f(\bar{x}+h)$ et $f(\bar{x}-h)$ jusqu'au troisième ordre.
On obtient alors

$$f'(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2). \tag{1.4}$$

- Cette approximation est la formule des **différences finies centrées**.

- Cette approximation est d'ordre 2.

Q. 2

a. **[rapport]** *Montrer que l'on a les deux formules suivantes*

$$f'(\bar{x}) = -\frac{f(\bar{x}+2h) - 4f(\bar{x}+h) + 3f(\bar{x})}{2h} + \mathcal{O}(h^2), \tag{1.5}$$

$$f'(\bar{x}) = \frac{3f(\bar{x}) - 4f(\bar{x}-h) + f(\bar{x}-2h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2). \tag{1.6}$$

b. **[code]** *On note* $x_i = a + ih$, $i \in [\![0, n]\!]$, *une discrétisation régulière de l'intervalle* $[a, b]$. *Soit une fonction* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *suffisament régulière. On suppose que les* y_i *sont donnés par*

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in [\![0, n]\!]. \tag{1.7}$$

Ecrire une fonction **diff**.d1fo2 *(fichier* `+diff/d1fo2.m`*) permettant de calculer des approximations d'ordre 2 de* $f'(x_i)$ *pour* $i \in [\![0, n]\!]$.

Q. 3

Ecrire un programme, nommé **diff**.order_d1f , *permettant de vérifier graphiquement, pour chacune des 2 fonctions précédentes , l'ordre des erreurs et d'afficher l'ordre numérique pour chacune des méthodes. voir figure 1.*

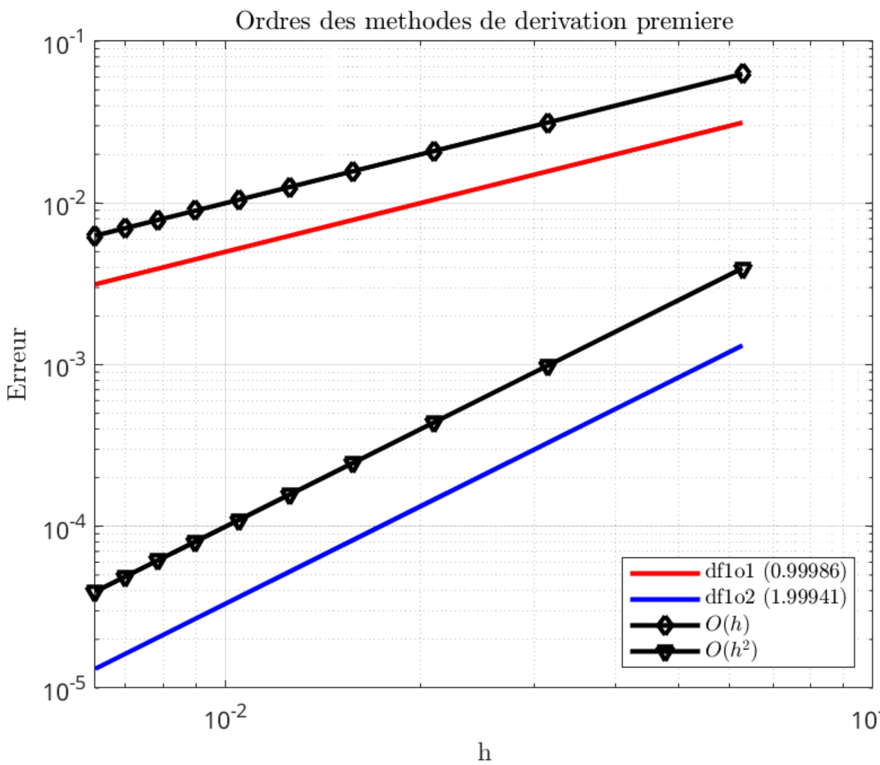

FIGURE 1 – Ordre de l'erreur des méthodes de dérivation

2 Approximation de dérivées secondes

L'objectif ici est déterminer une approximation d'ordre 2 de la dérivée seconde d'une fonction f (suffisament régulière) en les points d'une discrétisation régulière $x_i = a + ih$, $i \in [\![0, n]\!]$, de l'intervalle $[a, b]$.

Q. 4 [rapport]

a. Montrer que l'on a la formule suivante utilisant deux points de part et d'autres de $\bar{x}$:

$$f^{(2)}(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x}+h) - 2f(\bar{x}) + f(\bar{x}-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \tag{2.1}$$

b. Montrer en utilisant 3 formules de Taylor que

$$f^{(2)}(\bar{x}) = \frac{2f(\bar{x}) - 5f(\bar{x}+h) + 4f(\bar{x}+2h) - f(\bar{x}+3h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2). \tag{2.2}$$

c. Etablir la formule suivante n'utilisant que des points avant $\bar{x}$:

$$f^{(2)}(\bar{x}) = \frac{2f(\bar{x}) - 5f(\bar{x}-h) + 4f(\bar{x}-2h) - f(\bar{x}-3h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2). \tag{2.3}$$

Q. 5 [code]

a. Ecrire une fonction **diff**.d2fo2 *permettant de calculer des approximations d'ordre 2 de $f^{(2)}(x_i)$ pour $i \in [\![0, n]\!]$.*

b. Ecrire un programme, nommé **diff**.order_d2f *, permettant de vérifier/retrouver graphiquement, l'ordre de la méthode d'approximation précédente. voir figure 2.*

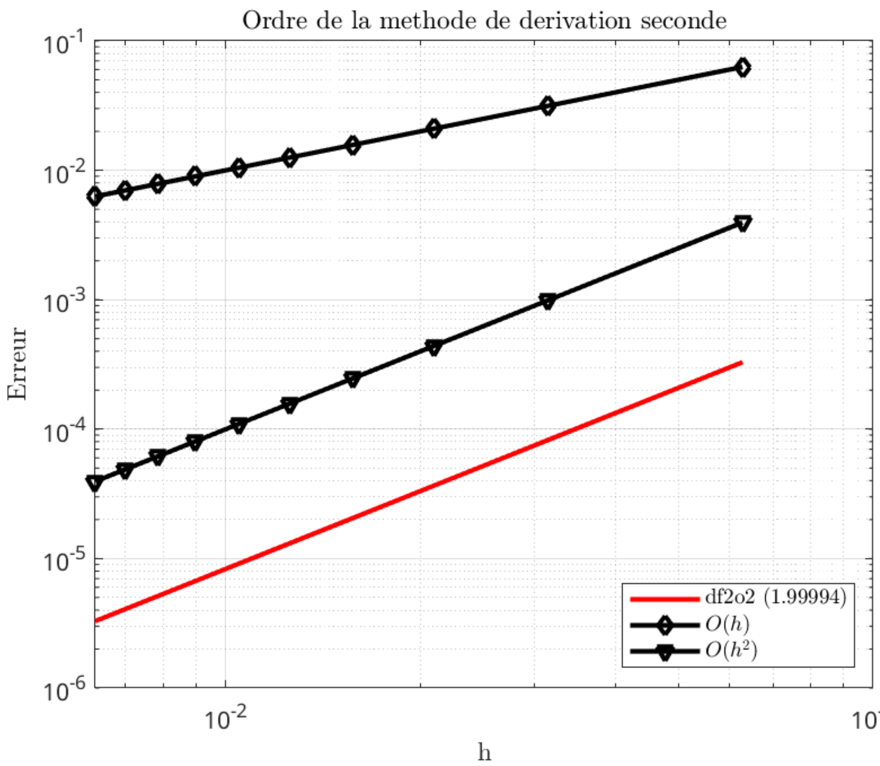

FIGURE 2 – Ordre de l'erreur lors de l'approximation de la dérivée seconde

On définit la matrice creuse associée au laplacien (en 1D opérateur dérivée seconde) discrétisé à l'ordre 2 par $\mathbb{K} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ avec

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Q. 6

a. **[code]** *Ecrire une fonction* matrix.Lap1D *(fichier* +matrix/Lap1D.m*) permettant de générer cette matrice creuse en utilisant la fonction* **sparse** .

b. **[rapport]** *Expliquer, en lien avec la discrétisation de l'opérateur de dérivée seconde à l'ordre* 2*, plusieurs méthodes permettant de tester/valider cette fonction et décrire les résultats attendus.*

c. **[code]** *Implémenter ces méthodes dans des fonctions* matrix.Lap1Dvalid01 , matrix.Lap1Dvalid02 , ... *ayant (au moins) comme argument la dimension de la matrice.*

3 B.V.P. modèle Dirichlet/Dirichlet

On souhaite résoudre par un schéma de type différences finies le problème aux limites (*Boundary Value Problem*) suivant

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x), \ \forall x \in]a;b[&& (3.1)\\ u(a) &= g_a \in \mathbb{R} && (3.2)\\ u(b) &= g_b \in \mathbb{R} && (3.3) \end{aligned}$$

On peut prendre comme jeux de données :

$$a = -\frac{2}{3}\pi,\ b = \frac{3}{2},\ f(x) = 4\cos(2x) - 9\sin(-3x+1),\ g_a = -\sin(1) - \frac{1}{2} \text{ et } g_b = \cos(3) + \sin\left(\frac{7}{2}\right).$$

Dans ce cas la solution exacte est

$$u(x) = \cos(2x) - \sin(-3x+1).$$

On note $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i=0}^{N}$ une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$.

Q. 7 [rapport]

Montrer qu'un schéma aux différences finies pour la résolution du problème (3.1)-(3.2)-(3.3) peut s'écrire sous la la forme matricielle

$$\left(\begin{array}{c|cccccc|c} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0\\ \hline -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots\\ \vdots & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 & -1\\ \hline 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} u_0\\ \hline u_1\\ u_2\\ \vdots\\ \vdots\\ u_{N-2}\\ u_{N-1}\\ \hline u_N \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} g_a\\ \hline h^2 f(x_1)\\ h^2 f(x_2)\\ \vdots\\ \vdots\\ h^2 f(x_{N-2})\\ h^2 f(x_{N-1})\\ \hline g_b \end{array}\right) \quad (3.4)$$

où $u_i \approx u(x_i)$, $\forall i \in [\![0, N]\!]$.

On admettra que ce schéma est (au moins) d'ordre 2 (voir cours de Mr Vauchelet/Mme Darbas, *EDPs linéaires et Différences Finies*) :

$$\max_{i \in [\![0,N]\!]} |u(x_i) - u_i| = \mathcal{O}(h^2). \quad (3.5)$$

Q. 8 [code]

a. *En utilisant la commande* A=-matrix.Lap1D(N+1); *, écrire une fonction* BVP0.assembly *(fichier* +BVP0/assembly.m*) retournant la matrice et le vecteur second membre décrit en* (3.4).

b. *Ecrire une fonction* BVP0.solve *(fichier* +BVP0/solve.m*) permettant de résoudre numériquement le problème (3.1)-(3.2)-(3.3) dont les données seront passées en paramètre. Cette fonction devra retourner la discrétisation en espace et la solution numérique trouvée.*

c. *Ecrire un programme* BVP0.example *(fichier* +BVP0/example.m*) permettant de de résoudre numériquement le problème (3.1)-(3.2)-(3.3), avec le jeu de données proposées, par un schéma différences finies d'ordre* 2*. Ce programme representera graphiquement, et de manière propre, la solution numé-*

rique obtenue, la solution exacte et l'erreur.

d. *Ecrire le programme* BVP0.order *(fichier* +BVP0/order.m*) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas h de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode. Un exemple de représentation est donné en Figure 3.*

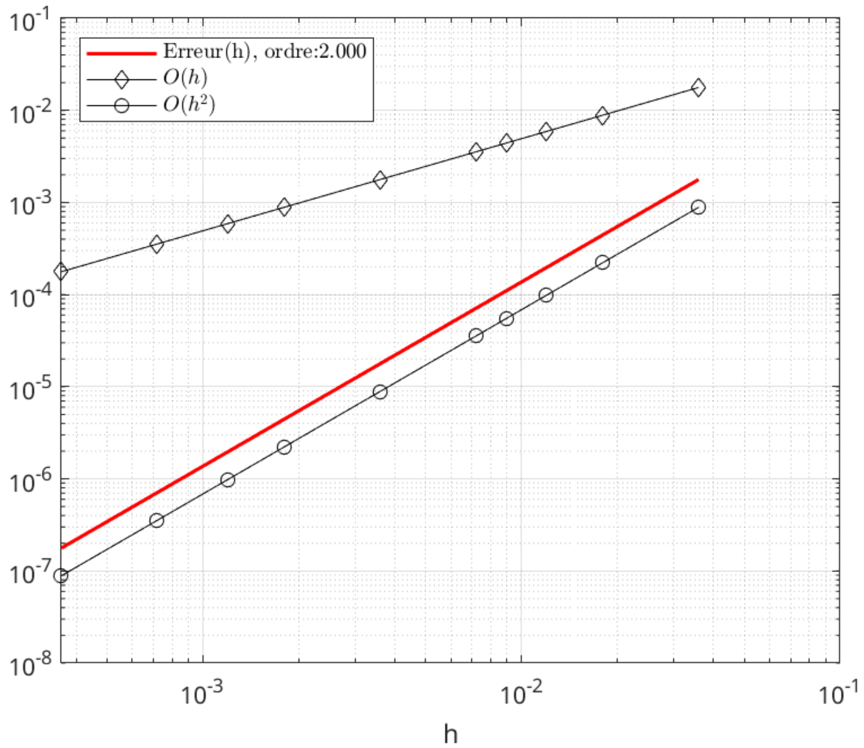

FIGURE 3 – Ordre du schéma représenté avec BVP0.order . Dans la légende, la valeur de l'ordre est déterminée numériquement.

Q. 9

a. **[rapport]** *Expliquer les modifications à apporter au système* (3.4) *pour déterminer une solution approchée de :*

$$-u''(x) + \nu u(x) = f(x), \ \forall x \in]a; b[\tag{3.6}$$
$$u(a) = g_a \in \mathbb{R} \tag{3.7}$$
$$u(b) = g_b \in \mathbb{R} \tag{3.8}$$

avec $\nu \geqslant 0$.

b. **[code]** *Ecrire un programme* BVP1.example *(fichier* +BVP1/example.m*) permettant de calculer une solution approchée de* (3.6)-(3.7)-(3.8) *avec* $\nu \geqslant 0$ *et un choix judicieux de données. Ce programme représentera graphiquement la solution numérique obtenue, la solution exacte et l'erreur. On utilisera, si possible, les fonctions déjà implémentées pour coller aux explications du rapport.*

c. **[code]** *Ecrire le programme* BVP1.order *(fichier* +BVP1/order.m*) permettant de représenter, en échelle logarithmique, l'erreur en fonction du pas h de discrétisation et d'afficher l'ordre de la méthode.*

4 B.V.P. modèle Neumann/Dirichlet

On cherche à résoudre par un schéma de type différences finies le problème suivant

$$-u''(x) = f(x), \ \forall x \in]a; b[\tag{4.1}$$
$$u'(a) = v_a \in \mathbb{R} \tag{4.2}$$
$$u(b) = u_b \in \mathbb{R} \tag{4.3}$$

On peut prendre comme jeux de données $a = -\frac{1}{4}\pi$, $b = \frac{1}{3}\pi$, $f(x) = \sin(x) - 2$, $g_a = -\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{2}$ et $g_b = \frac{1}{9}\pi^2 + \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Dans ce cas la solution exacte est $u(x) = x^2 + \sin(x)$.

4.1 Neumann ordre 1

Dans la condition aux limites de Neumann (4.2), on va approcher $u'(a)$ à l'ordre 1 par

$$\frac{u(a+h) - u(a)}{h}.$$

Q. 10

a. **[rapport]** *Expliquer les modifications à apporter au système* (3.4) *pour déterminer une solution approchée de* (4.1)-(4.2)-(4.3) *utilisant l'approximation d'ordre* 1 *précédente.*

b. **[code]** *Ecrire le programme* BVP2.example *(fichier* +BVP2/example.m*) permettant de représenter une solution approchée de* (4.1)-(4.2)-(4.3)*. Avec un choix judicieux de données, ce programme representera graphiquement la solution numérique obtenue, la solution exacte et l'erreur. On utilisera, si possible, les fonctions déjà implémentées pour coller aux explications du rapport.*

c. **[code]** *Ecrire le programme* BVP2.order *(fichier* +BVP2/order.m*) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas* h *de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode.*

4.2 Neumann ordre 2

Dans la condition aux limites de Neumann (4.2), on va approcher $u'(a)$ à l'ordre 2 par

$$\frac{-u(a+2h) + 4u(a+h) - 3u(a)}{2h}.$$

Q. 11

a. **[rapport]** *Expliquer les modifications à apporter au système* (3.4) *pour déterminer une solution approchée de* (4.1)-(4.2)-(4.3) *utilisant l'approximation d'ordre* 2 *précédente.*

b. **[code]** *Ecrire le programme* BVP3.example *(fichier* +BVP3/example.m*) permettant de représenter une solution approchée du problème* (4.1)-(4.2)-(4.3)*. Avec un choix judicieux de données, ce programme representera graphiquement la solution numérique obtenue, la solution exacte et l'erreur. On utilisera, si possible, les fonctions déjà implémentées pour coller aux explications du rapport.*

c. **[code]** *Ecrire le programme* BVP3.order *(fichier* +BVP3/order.m*) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas* h *de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode.*

5 B.V.P. modèle Dirichlet/Robin

On cherche à résoudre par un schéma de type différences finies le problème suivant

$$-u''(x) = f(x), \ \forall x \in]a; b[\tag{5.1}$$
$$u(a) = g_a \in \mathbb{R} \tag{5.2}$$
$$u'(b) + \mu u(b) = g_b \in \mathbb{R} \tag{5.3}$$

On choisira un jeu de données de manière à avoir une solution exacte non triviale.

5.1 Robin ordre 1

Dans la condition aux limites de Robin (5.2), on va approcher $u'(b)$ à l'ordre 1 par $\frac{u(b)-u(b-h)}{h}$

Q. 12

a. **[rapport]** *Expliquer les modifications à apporter au système* (3.4) *pour déterminer une solution approchée de* (5.1)-(5.2)-(5.3) *utilisant l'approximation d'ordre* 1 *précédente.*

b. **[code]** *Ecrire le programme* BVP4.example *(fichier* +BVP4/example.m*) permettant de représenter une solution approchée du problème* (5.1)-(5.2)-(5.3). *Avec un choix judicieux de données, ce programme representera graphiquement la solution numérique obtenue, la solution exacte et l'erreur. On utilisera, si possible, les fonctions déjà implémentées pour coller aux explications du rapport.*

c. **[code]** *Ecrire le programme* BVP4.order *(fichier* +BVP4/order.m*) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas h de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode.*

5.2 Robin ordre 2

Q. 13

a. **[rapport]** *Dans la condition aux limites de Robin (5.2), déterminer comment approcher $u'(b)$ à l'ordre* 2.

b. **[rapport]** *Expliquer les modifications à apporter au système* (3.4) *pour déterminer une solution approchée de* (5.1)-(5.2)-(5.3) *utilisant l'approximation d'ordre* 2 *précédente.*

c. **[code]** *Ecrire le programme* BVP5.example *(fichier* +BVP5/example.m*) permettant de représenter une solution approchée du problème précédent. Avec un choix judicieux de données, ce programme representera graphiquement la solution numérique obtenue, la solution exacte et l'erreur. On utilisera, si possible, les fonctions déjà implémentées pour coller aux explications du rapport.*

d. **[code]** *Ecrire le programme* BVP5.order *(fichier* +BVP5/order.m*) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas h de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode.*

6 B.V.P. avec conditions aux limites génériques

On cherche à résoudre par un schéma de type différences finies le problème suivant

$$
\begin{aligned}
-u''(x) &= f(x),\ \forall x \in]a;b[&& (6.1)\\
\delta_a u'(a) + \mu_a u(a) &= g_a \in \mathbb{R} && (6.2)\\
\delta_b u'(b) + \mu_b u(b) &= g_b \in \mathbb{R} && (6.3)
\end{aligned}
$$

où δ_a et δ_b sont donnés dans $\{0,1\}$ et μ_a et μ_b sont deux réels donnés.

Q. 14 [rapport]

a. *Donner un jeu de valeurs δ_a, δ_b, μ_a, μ_b, pour lesquelles il n'y a pas trivialement unicité de la solution de* (6.1),(6.2),(6.3) *en le justifiant.*

b. *Ecrire une discrétisation à l'ordre* 2 *de chacune des condition aux limites.*

c. *Expliquer les modifications à apporter au système* (3.4) *pour déterminer une solution approchée de* (6.1)-(6.2)-(6.3) *utilisant l'approximation d'ordre* 2 *précédente.*

Q. 15 [code]

a. *Ecrire une fonction* BVP6.solve *(fichier* +BVP6/solve.m*) permettant de résoudre numériquement le problème* (7.1)-(7.2)-(7.3)*.Cette fonction devra retourner la discrétisation en espace et la solution numérique trouvée.*

b. *Ecrire le programme* BVP6.example *(fichier* +BVP6/example.m*) permettant de représenter une solution approchée du problème précédent.*

c. *Ecrire le programme* BVP6.order *(fichier* +BVP6/order.m*) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas h de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode.*

7 Généralisation et structure

On cherche à résoudre par un schéma de type différences finies le problème suivant

$$-u''(x) + \nu u(x) = f(x), \ \forall x \in]a; b[\tag{7.1}$$
$$\delta_a u'(a) + \mu_a u(a) = g_a \in \mathbb{R} \tag{7.2}$$
$$\delta_b u'(b) + \mu_b u(b) = g_b \in \mathbb{R} \tag{7.3}$$

où ν est une constante. Les autres paramètres sont décrits dans la section précédente.
L'objectif ici est double : commencer une généralisation de l'EDP à résoudre et étudier le comportement de la solution numérique en fonction de ν. Il faut aussi noter que l'existence et l'unicité d'une solution à ce problème ne sont pas forcément assurées dans le cas général ! Toutefois, il est possible de les obtenir sous les hypothèses (non optimales)

$$\nu > 0, \quad \mu_a \leqslant 0 \quad \mu_b \geqslant 0$$

avec f suffisament régulière.
Toutes les données du problème (7.1)-(7.2)-(7.3) devront être stockées dans une structure de donnée qui sera utilisée dans les programmes (et fonctions) qui suivent.

Q. 16

a. **[rapport]** *Expliquer les modifications à apporter au système obtenu en **Q. 14** (solution approchée à l'ordre 2 de (6.1)-(6.2)-(6.3)) pour déterminer une solution approchée à l'ordre 2 de (7.1)-(7.2)-(7.3).*

b. **[code]** *Ecrire une fonction* BVP.solve *(fichier* +BVP/solve.m*) permettant de résoudre numériquement le problème (7.1)-(7.2)-(7.3) dont les données seront passées en paramètre sous forme d'une unique **structure**. Cette fonction devra retourner la discrétisation en espace et la solution numérique trouvée.*

c. **[code]** *Ecrire un programme* BVP.example *(fichier* +BVP/example.m*) permettant de représenter une solution approchée du problème précédent et de la comparer à la solution exacte (les données seront choisies judicieusement avec $\nu > 0$).*

d. **[code]** *Ecrire le programme* BVP.order *(fichier* +BVP/order.m*) permettant de représenter l'erreur en fonction du pas h de discrétisation en échelle logarithmique et d'afficher l'ordre de la méthode.*

On va maintenant illustrer le caractère mal posé (i.e. non unicité de la solution dans certains cas) du problème aux limites (7.1)-(7.2)-(7.3) avec des conditions de Dirichlet en a et b.

Q. 17

On choisi comme jeu de données $a = 0$, $b = \pi$ et, en prenant comme solution exacte $u(x) = \cos(x^2 - 1)$, on peut en déduire g_a et g_b, ainsi que $f(x)$ en fonction de ν.

a. **[code]** *Ecrire un programme* BVP.exampleDD *(fichier* +BVP/exampleDD.m*) permettant de représenter une solution approchée du problème précédent, de la comparer à la fonction u et de représenter l'erreur commise.*

b. **[rapport]** *Que se passe-t'il si $\nu = -1$? $\nu = -2$? $\nu = -3$? $\nu = -4$?, $\nu = -9$?*

La section suivante devrait permettre de comprendre le *phénomène* observé.

8 Modes propres de problèmes aux limites

Pour regarder le comportement de la solution en fonction de ν on va tout d'abord résoudre par un schéma de type différences finies le problème aux valeurs propres : Trouver (λ, v) solution de

$$-v''(x) = \lambda v(x), \ \forall x \in]a; b[\tag{8.1}$$
$$\delta_a v'(a) + \mu_a v(a) = 0 \tag{8.2}$$
$$\delta_b v'(b) + \mu_b v(b) = 0 \tag{8.3}$$

Le problème aux valeurs propres avec les C.L. de Dirichlet ($\delta_a = \delta_b = 0$ et $\mu_a = \mu_b = 1$) à pour modes propres $(\lambda_k, v_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ avec

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{b-a}\right)^2, \quad v_k(x) = \sin\left(k\pi\frac{x-a}{b-a}\right).$$

Ce résultat est démontré dans le mini-cours qui vous a été donné (voir document fourni).

Q. 18 [rapport] collectif
Etablir les modes propres pour (8.1)

a. ***Groupe 1*** *: avec les C.L.* $v'(a) = 0$ *et* $v(b) = 0$ *(Neumann en* a *et Dirichlet en* b*)*

b. ***Groupe 2*** *: avec les C.L.* $v(a) = 0$ *et* $v'(b) = 0$ *(Dirichlet en* a *et Neumann en* b*)*

c. ***Groupe 3*** *: avec les C.L.* $v'(a) = 0$ *et* $v'(b) = 0$ *(Neumann en* a *et Neumann en* b*)*

Sous Matlab/Octave, la fonction eigs permet, entre autres, de calculer certains modes propres du problème aux valeurs propres généralisés

$$\mathbb{A}\boldsymbol{u} = \lambda\mathbb{B}\boldsymbol{u}$$

où $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ sont des matrices carrées de même dimension.
Pour calculer numériquement les 10 valeurs propres les plus proches 0 ainsi que les vecteurs propres associés, on peut utiliser la commande

[V,D]= eigs(A,B,10,0).

Dans ce cas V et D sont des matrices N-by-10 et 10-by-10 et le k-ème mode propre est

$$(\lambda_k, \boldsymbol{u}_k) = (\text{D(k,k)}, \text{V(:,k)})\,.$$

Q. 19 [rapport]
On se place dans le cas des C.L. Dirichlet en a *et Dirichlet en* b

a. **[rapport]** *Proposer un schéma aux différences finies pour résoudre ce problème. Celui-ci pourra alors s'écrire sous la forme*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{v} = \lambda\mathbb{B}\boldsymbol{v}$$

où $\mathbb{A}$ *et* $\mathbb{B}$ *sont des matrices à expliciter et* $\boldsymbol{v}$ *un vecteur.*

b. **[code]** *Ecrire un programme* eBVP.DD *permettant de calculer les* 6 *valeurs propres les plus proches de* 0 *representer les vecteurs propres associés.*

c. *As t'on unicité de la solution de* (7.1)-(7.2)-(7.3) *si* ν *est l'opposé d'une des valeurs propres précédentes.*

d. *Vérifier ces résultats on choisissant judicieusement les paramètres du programme* BVP.example .