

THÈSE

DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS XIII

Spécialité :
MATHÉMATIQUES APPLIQUÉS

présenté pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS XIII

PAR

François CUVELIER

Sujet :

Etude théorique de l'approximation de Kirchhoff pour l'équation de Maxwell, dans le complémentaire d'une réunion de convexes. Etude numérique.

soutenue publiquement le 23 juin 1994 à 15h devant le jury
composé de:

Mr C. BARDOS,
Mr G. LEBEAU,

Rapporteur
Rapporteur

Mr M. BALABANE,
Mr C. BASDEVANT,
Mr P. LEVY-BRUHL,
Mr J.C. NEDELEC,

Directeur

Mr A. DE LA BOURDONNAYE,
Mr S. VERMERSCH,

invité
invité

Je tiens tout d'abord à exprimer ma gratitude à Mikhaël BALABANE, pour m'avoir suivi depuis la maîtrise. J'ai beaucoup appris de lui.

Je veux remercier ici Monsieur Gilles LEBEAU qui a accepté d'être rapporteur de cette thèse. Sa très soigneuse lecture et ses conseils ont été très bénéfiques.

Monsieur Claude BARDOS a bien voulu être rapporteur. Pour cela, et pour l'intérêt qu'il a pris à ce travail, je le remercie.

Monsieur J.C. NEDELEC, intéressé à ce travail, a gentilement accepté de faire partie du jury. Je lui en suis gré.

J'exprime mes remerciements à Messieurs C. BASDEVANT, P. LEVY-BRUHL et A. DE LA BOURDONNAYE pour avoir consenti à faire partie du jury.

Le CESTA, et plus particulièrement Monsieur Sébastien VERMERSCH, m'a introduit au sujet. Le soutien numérique, et le contrat d'accompagnement passé avec l'université, ont permis à ce travail de se passer dans d'excellentes conditions. Je tiens à exprimer ici ma reconnaissance.

Je tiens à remercier tous les enseignants du département de Mathématiques de l'université de Reims pour m'avoir donné le goût des Mathématiques.

Le travail a été effectué au sein du Laboratoire d'Analyse, Géométrie et Applications de l'université Paris Nord et du groupe de travail d'Analyse Numérique. Merci pour les moments agréables passés en compagnie de tous.

A Florence et Léa

Table des matières

1	Introduction et énoncé des résultats	7
1.1	Introduction	7
1.2	Énoncé du résultat pour l'équation d'Helmholtz	8
1.3	Énoncé du résultat pour les équations de Maxwell	10
2	Notations et propriétés	15
2.1	Notations	15
2.1.1	Notations différentielles	15
2.1.2	Notations pour l'optique géométrique et l'optique physique	17
2.2	Propriétés	21
2.2.1	Propriétés de l'ensemble \mathcal{S}_σ et de l'application S_σ	21
2.2.2	Propriété de l'application $T_{B,\eta,\zeta}$	22
2.2.3	Propriété des matrices P_j^ρ	23
2.2.4	Propriétés des applications $\mathcal{E}_{(\zeta,\eta)}$, $\mathcal{H}_{(\zeta,\eta)}$ et \mathcal{F}_η	23
3	Preuve du théorème 1.1 (équation d'Helmholtz)	27
3.1	Nouvelle formulation pour l'itération de Kirchhoff	28
3.2	Détermination des points de phase stationnaire	28
3.3	Relations entre P_j^ν et M_j^ν	30
3.3.1	Preuve du Lemme 3.2	31
3.4	Contribution des chemins stationnaires	36
3.5	Contribution des chemins non-optiques	37
3.6	Comparaison avec l'approximation de l'optique géométrique	40

4	Preuve du théorème 1.2 (équations de Maxwell)	41
4.1	Nouvelle formulation	42
4.2	Contribution des chemins de phase stationnaire	42
4.3	Contribution des chemins non-optiques	43
4.4	Comparaison avec l'approximation de l'optique géométrique	46
5	Résultats numériques	47
5.1	Description des algorithmes	47
5.1.1	Algorithme 1	48
5.1.2	Algorithme 2	48
5.2	Algorithme 1	49
5.2.1	Calcul des contribution de l'intégrale sur Γ_1	50
5.2.2	Calcul des contributions de l'intégrale sur Γ_2	52
5.2.3	conclusion	55
5.3	Algorithme 2	55
5.3.1	cas monodimensionnel	56
5.3.2	cas bidimensionnel	65
5.3.3	Intégration au dernier rebond	70
5.3.4	Conclusion	76
5.4	conclusion générale	76
6	Rappel des théorèmes de phase stationnaire	77
6.1	Théorèmes de phase stationnaire	77
6.2	Corollaires des théorèmes de phase stationnaire	78
6.2.1	Itéré du théorème de phase stationnaire	79
6.2.2	Cas d'une amplitude C^∞ hors d'une sous-variété où elle s'annule	90
7	Rappels sur l'approximation de l'optique géométrique	93
7.1	Approximation de l'optique géométrique pour l'équation d'Helmholtz	93
7.1.1	Position du problème	94
7.1.2	Equations de l'optique géométrique	94
7.1.3	Résolution de l'équation eikonale dans \mathbb{R}^3	95
7.1.4	Résolution de l'équation de transport pour a_0 dans \mathbb{R}^3	96
7.1.5	Calcul d'une réflexion	99

7.2	Approximation de l'optique géométrique pour les équations de Maxwell . .	103
8	Rappels sur l'approximation de Kirchhoff	107
8.1	Représentations intégrales	107
8.2	Approximation de Kirchhoff pour l'équation d'Helmholtz	109
8.3	Approximation de Kirchhoff pour les équations de Maxwell	110

Chapitre 1

Introduction et énoncé des résultats

1.1 Introduction

On étudie ici le problème de diffraction d'une onde incidente plane dans \mathbb{R}^3 dans Ω , extérieur d'un domaine Ω' réunion finie et disjointe de compacts strictement convexes réguliers, pour les équations d'Helmholtz et de Maxwell.

Une approximation haute fréquence classique est celle de l'optique géométrique qui, en un point x de Ω , permet de calculer, à partir des rayons de l'optique passant par x , une approximation du champ diffracté par Ω' . Ici le terme "haute fréquence" signifie que la longueur d'onde est petite devant les courbures du bord de Ω' . L'inconvénient majeur de cette méthode est son instabilité numérique : il est nécessaire, en effet, de déterminer tous les rayons optiques passant par x pour le calcul de cette approximation. Or cette détermination peut être entachée d'une erreur grande pour de petites erreurs dues à la représentation numérique de $\partial\Omega$.

Une autre approximation haute fréquence classique est celle de Kirchhoff, basée sur des représentations intégrales (voir [7] dans le cas d'Helmholtz et [1] pour Maxwell). Cependant, le domaine de validité de cette méthode est restreint à Ω' compact strictement convexe (voir [6]). Celle-ci ne peut s'étendre à Ω' réunion finie et disjointe de compacts strictement convexes du fait de son incapacité à "voir" les réflexions multiples.

L'objet de cette thèse est la détermination, l'étude théorique et numérique, d'une méthode intégrale itérative, numériquement stable, équivalente au premier ordre, à hautes fréquences,

à l'approximation de l'optique géométrique . Le premier pas de l'itération correspond à l'approximation classique de Kirchhoff.

L'étude théorique est menée dans les chapitres 1,3 et 4. L'étude des méthodes numériques, leur application au problème de diffraction, et les résultats des tests numériques sont l'objet du chapitre 5.

1.2 Énoncé du résultat pour l'équation d'Helmholtz

On considère l'équation d'Helmholtz suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta v(x; k\xi) + k^2 v(x; k\xi) = 0 \text{ pour } x \in \Omega \\ v(x; k\xi) = 0 \text{ pour } x \in \partial\Omega \\ v(x; k\xi) = a(x; k\xi)e^{-ik\xi \cdot x} + u(x; k\xi) \text{ pour } x \in \Omega \\ \text{où } u \text{ satisfait à la condition de radiation} \\ \text{de Sommerfeld Sortante :} \\ r^2 \left(\frac{\partial u}{\partial r} + iku \right) \text{ borné quand } r = |x| \rightarrow +\infty \end{array} \right. \quad (1.1)$$

où le complémentaire de Ω , noté Ω' , est un domaine régulier borné. L'onde incidente plane, $a(x; k\xi)e^{-ik\xi \cdot x}$, est la donnée du problème (1.1). On a la normalisation $|\xi| = 1$. L'amplitude a vérifie l'équation d'Helmholtz ($\Delta a + k^2 a = 0$) et admet un développement asymptotique en k de la forme

$$a(x; k\xi) = \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\alpha_j(x)}{k^j} + O\left(\frac{1}{k^m}\right)$$

L'onde diffractée u est donc l'inconnu du problème (1.1).

A la solution de ce problème, on associe classiquement l'**approximation de l'optique géométrique** donnée par

$$v_{O.G.}(x; k\xi) = \sum_{loc. finie} e^{-ik\varphi(x)} a_0(x) \quad (1.2)$$

où la phase $\varphi(x)$ est la longueur d'un chemin optique passant par x (rappelée au chapitre 7) et le calcul de l'amplitude $a_0(x)$ est rappelée au chapitre 7.

Une autre approximation classique de la solution du problème (1.1) dans le cas où $a \equiv 1$ est donnée par :

$$e^{-ik\xi \cdot x} + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} ik(\xi \cdot n(\sigma) - |\xi \cdot n(\sigma)|) e^{-ik\xi \cdot \sigma} \frac{e^{-ik|x-\sigma|}}{|x-\sigma|} d\sigma \quad (1.3)$$

où $n(\sigma)$ est la normale unitaire à $\partial\Omega'$ en σ , extérieure à Ω' . C'est la formule d'**approximation de Kirchhoff**, valable uniquement lorsque Ω' est un compact régulier **strictement convexe**. (voir [9])

On se propose de généraliser cette formule à Ω' **réunion finie et disjointe de compacts réguliers strictement convexes** $(K_i)_{i=1,\dots,N}$.

Pour celà, on introduit la suite de noyaux suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1(\sigma) = ik\alpha_0(\sigma)(|\xi \cdot n(\sigma)| - \xi \cdot n(\sigma))e^{-ik\xi \cdot \sigma} \quad \forall \sigma \in \partial\Omega \\ \text{et} \\ \text{pour } \sigma \in \partial K_j \\ p_l(\sigma) = \frac{ik}{4\pi} \int_{\partial\Omega \setminus \partial K_j} p_{l-1}(\sigma') \left[\left| \frac{\sigma' - \sigma}{|\sigma' - \sigma|} \cdot n(\sigma') \right| - \frac{\sigma' - \sigma}{|\sigma' - \sigma|} \cdot n(\sigma') \right] \frac{e^{-ik|\sigma' - \sigma|}}{|\sigma' - \sigma|} d\sigma' \end{array} \right. \quad (1.4)$$

On pose

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0(x; k\xi) = 0 \\ u_l(x; k\xi) = u_{l-1}(x; k\xi) + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} p_l(\sigma) \frac{e^{-ik|x - \sigma|}}{|x - \sigma|} d\sigma \end{array} \right. \quad (1.5)$$

On note

$$(\partial\Omega)_*^l = \left\{ (\sigma_1, \dots, \sigma_l) \in (\partial\Omega)^l \text{ avec } (\sigma_j \in \partial K_i \text{ et } \sigma_{j+1} \in \partial K_{i'} \Rightarrow i \neq i') \right\}$$

et ψ_l la phase définie sur $\Omega \times (\partial\Omega)_*^l$ suivante

$$\psi_l(x; \sigma_1, \dots, \sigma_l) = \xi \cdot \sigma_1 + \sum_{j=1}^{l-1} |\sigma_{j+1} - \sigma_j| + |x - \sigma_l| \quad (1.6)$$

On appelle **l-chemin généralisé passant par x** , tout l -uplet $(\sigma_1, \dots, \sigma_l) \in (\partial\Omega)_*^l$ tel que:

1. $\xi \cdot n(\sigma_1) < 0$ et $(\sigma_{j+1} - \sigma_j) \cdot n(\sigma_{j+1}) < 0$ pour $j \in \{1, \dots, l-1\}$,
2. La phase $\psi_l(x, \bullet)$ stationne sur $(\partial\Omega)_*^l$ en $(\sigma_1, \dots, \sigma_l)$.

On note $\mathcal{C}_l(x)$ l'ensemble des l -chemins généralisés passant par x et $\mathcal{C}(x) = \bigcup_l \mathcal{C}_l(x)$.

On appelle **l-ombre portée généralisée des contours apparents**, l'ensemble des points $x \in \Omega$ tel qu'il existe $(\sigma_1, \dots, \sigma_l) \in (\partial\Omega)_*^l$ vérifiant

1. $\xi \cdot n(\sigma_1) = 0$ ou $\exists j \in \{1, \dots, l-1\}$ tel que $(\sigma_{j+1} - \sigma_j) \cdot n(\sigma_{j+1}) = 0$,
2. La phase $\psi_l(x, \bullet)$ stationne sur $(\partial\Omega)_*^l$ en $(\sigma_1, \dots, \sigma_l)$.

On note \mathcal{T}_l l'ensemble des l-ombres portées généralisées des contours apparents et $\mathcal{T} = \bigcup_l \mathcal{T}_l$.

On énonce le théorème principal comparant la méthode itérative décrite précédemment (1.4-1.5) et l'approximation de l'optique géométrique évoquée en (1.2), et rappelée au chapitre 7, pour le problème 1.1:

Théorème 1.1 *Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^3 , extérieur d'un domaine Ω' réunion finie et disjointe de compacts strictement convexes réguliers. Soit $x \in \Omega \setminus \mathcal{T}$. Si $C_l(x) = \emptyset$ pour $l > n$ alors*

$$\alpha_0(x)e^{-ik\xi \cdot x} + u_n(x; k\xi) - v_{0,G.}(x; k\xi) = O\left(\frac{1}{k}\right) \quad (1.7)$$

localement uniformément en x .

1.3 Énoncé du résultat pour les équations de Maxwell

On étudie ici les équations de Maxwell pour un problème stationnaire dans Ω , extérieur d'un conducteur parfait borné noté Ω' , plongé dans le vide.

On considère les équations de Maxwell suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} -ik \mathbf{E} + \text{rot } \mathbf{H} = 0 \text{ dans } \Omega \\ \text{div } \mathbf{E} = 0 \text{ dans } \Omega \\ ik \mathbf{H} + \text{rot } \mathbf{E} = 0 \text{ dans } \Omega \\ \text{div } \mathbf{H} = 0 \text{ dans } \Omega \end{array} \right. \quad (1.8)$$

avec les conditions aux limites homogènes

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E} \wedge \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (1.9)$$

et des conditions de radiations à l'infini précisées ci-dessous. \mathbf{E} et \mathbf{H} sont appelés respectivement champ électrique et champ magnétique et \mathbf{n} est la normale extérieure à $\partial\Omega'$.

On s'intéresse à la diffraction d'une onde électromagnétique incidente plane connue par le conducteur parfait Ω' . Cette onde incidente définie par le couple $\{\mathbf{E}^I, \mathbf{H}^I\}$ vérifie les équations de Maxwell (1.8) dans \mathbb{R}^3 et s'écrit sous la forme

$$\{\mathbf{E}^I, \mathbf{H}^I\}(x; k\xi) = \{\mathbf{e}^I(x; k\xi)e^{-ik\xi \cdot x}, \mathbf{h}^I(x; k\xi)e^{-ik\xi \cdot x}\}$$

où \mathbf{e}^I et \mathbf{h}^I admettent un développement asymptotique en k de la forme

$$\mathbf{e}^I(x; k\xi) = \sum_{j=1}^{l-1} \frac{\mathbf{e}_j^I(x)}{k^j} + O\left(\frac{1}{k^l}\right)$$

$$\mathbf{h}^I(x; k\xi) = \sum_{j=1}^{l-1} \frac{\mathbf{h}_j^I(x)}{k^j} + o\left(\frac{1}{k^l}\right)$$

On cherche l'onde électromagnétique totale $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ sous la forme $\{\mathbf{E}_I + \mathbf{E}_R, \mathbf{H}_I + \mathbf{H}_R\}$ avec $\{\mathbf{E}_R, \mathbf{H}_R\}$ onde électromagnétique diffractée solution des équations de Maxwell (1.8). L'onde incidente étant connue, rechercher l'onde électromagnétique totale revient à déterminer l'onde électromagnétique diffractée satisfaisant aux conditions aux limites :

$$\begin{cases} \mathbf{E}_R \wedge \mathbf{n} = -\mathbf{E}_I \wedge \mathbf{n} \text{ sur } \partial\Omega \\ \mathbf{H}_R \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{H}_I \cdot \mathbf{n} \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.10)$$

Cependant ces conditions ne sont pas suffisantes pour déterminer $\{\mathbf{E}_R, \mathbf{H}_R\}$ de manière unique : il faut ajouter une condition de radiation à l'infini dite *condition de rayonnement de Sommerfeld Sortante* donnée par

$$\begin{cases} (i) & \mathbf{rot} \mathbf{E}_R \wedge \frac{\mathbf{x}}{r} + ik \mathbf{E}_R = o\left(\frac{1}{r}\right) \text{ pour } r = |x| \rightarrow \infty \\ (ii) & \mathbf{rot} \mathbf{H}_R \wedge \frac{\mathbf{x}}{r} + ik \mathbf{H}_R = o\left(\frac{1}{r}\right) \text{ pour } r = |x| \rightarrow \infty \\ (iii) & \mathbf{E}_R = o\left(\frac{1}{r}\right) \quad \mathbf{H}_R = o\left(\frac{1}{r}\right) \end{cases} \quad (1.11)$$

En fait, il est possible d'éliminer l'un des deux champs lors de la résolution du problème (voir [1]). Cela revient alors à déterminer \mathbf{E}_R solution du problème équivalent suivant :

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{E}_R + k^2 \mathbf{E}_R = 0 \text{ dans } \Omega \\ \text{div } \mathbf{E}_R = 0 \text{ dans } \Omega \\ \mathbf{E}_R \wedge \mathbf{n} = -\mathbf{E}_I \wedge \mathbf{n} \text{ sur } \partial\Omega \\ \mathbf{rot} \mathbf{E}_R \wedge \frac{\mathbf{x}}{r} + ik \mathbf{E}_R = o\left(\frac{1}{r}\right) \text{ pour } r = |x| \rightarrow \infty \\ \mathbf{E}_R = o\left(\frac{1}{r}\right) \end{cases} \quad (1.12)$$

\mathbf{H}_R étant alors donné par

$$\mathbf{H}_R = -\frac{1}{ik} \mathbf{rot} \mathbf{E}_R$$

A la solution du problème (1.12), on associe classiquement, à haute fréquence, l'approximation de l'optique géométrique donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{O.G.}(x; k\xi) &= \sum_{loc. finie} e^{-ik\varphi(x)} \mathbf{e}_0^R(x) \\ \text{et} & \\ \mathbf{H}_{O.G.}(x; k\xi) &= \sum_{loc. finie} e^{-ik\varphi(x)} \mathbf{h}_0^R(x) \end{aligned} \quad (1.13)$$

où la phase $\varphi(x)$ est la longueur d'un chemin optique passant par x (défini au chapitre 7) et où l'amplitude vectorielle $\mathbf{e}_0^R(x)$ est calculée au chapitre 7. Numériquement cette formule

est instable (même explication que pour le cas de l'équation d'Helmholtz), c'est pourquoi nous étudions une méthode équivalente, à hautes fréquences, stable numériquement.

La solution du problème (1.12) est donnée par la formule de **Stratton-Chu** :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_R(x; k\xi) &= -\frac{1}{4ik\pi} \nabla_x \int_{\partial\Omega} \frac{e^{-ik|x-\sigma|}}{|x-\sigma|} \operatorname{div}_\sigma^S \mathbf{J}(\sigma) d\gamma(\sigma) \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} \frac{e^{-ik|x-\sigma|}}{|x-\sigma|} \mathbf{J}(\sigma) d\gamma(\sigma) \end{aligned} \quad (1.14)$$

L'**approximation** haute fréquence classique de **Kirchhoff** consiste à prendre

$$\mathbf{J}(\sigma) \approx \tilde{\mathbf{J}}(\sigma) = \begin{cases} 2 \mathbf{n}(\sigma) \wedge \mathbf{H}_I(\sigma) & \text{si } \xi \cdot \mathbf{n}(\sigma) < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.15)$$

où $\sigma \in \partial\Omega$, et à approcher le champ électrique diffracté par

$$-\frac{ik}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left(\tilde{\mathbf{J}}(\sigma) - \left(\frac{x-\sigma}{|x-\sigma|} \cdot \tilde{\mathbf{J}}(\sigma) \right) \frac{x-\sigma}{|x-\sigma|} \right) \frac{e^{-ik|x-\sigma|}}{|x-\sigma|} d\gamma(\sigma) \quad (1.16)$$

et le champ magnétique diffracté par

$$-\frac{ik}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left(\frac{x-\sigma}{|x-\sigma|} \wedge \tilde{\mathbf{J}}(\sigma) \right) \frac{x-\sigma}{|x-\sigma|} \frac{e^{-ik|x-\sigma|}}{|x-\sigma|} d\gamma(\sigma) \quad (1.17)$$

Cependant, comme dans le cas d'Helmholtz, cette méthode ne permet pas l'obtention de champs multiplesment réfléchis : à haute fréquence, cette méthode n'est équivalente à l'approximation de l'optique géométrique que dans le cas où Ω' est un compact régulier strictement convexe.

On se propose de généraliser cette formule à Ω' **réunion finie et disjointe de compacts** $(K_i)_{i=1, \dots, N}$ **réguliers strictement convexes**.

Pour cela, on note avec σ et σ' appartenant à $\partial\Omega$

$$\theta(\sigma) = \begin{cases} 2 & \text{si } \xi \cdot \mathbf{n}(\sigma) < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\theta(\sigma, \sigma') = \begin{cases} 2 & \text{si } \frac{\sigma' - \sigma}{|\sigma' - \sigma|} \cdot \mathbf{n}(\sigma') < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On introduit la suite de noyaux suivante

$$\begin{cases} \mathbf{J}_1(\sigma) = \theta(\sigma) [\mathbf{h}_0^I(\sigma) \wedge \mathbf{n}(\sigma)] e^{-ik\xi \cdot \sigma} \quad \forall \sigma \in \partial\Omega \\ \text{et} \quad \text{pour } \sigma \in \partial K_j, j \in \{1, \dots, N\} \\ \mathbf{J}_l(\sigma) = \frac{ik}{4\pi} \int_{\partial\Omega \setminus \partial K_j} \theta(\sigma, \sigma') \left[\left(\frac{\sigma - \sigma'}{|\sigma - \sigma'|} \wedge \mathbf{J}_{l-1}(\sigma') \right) \wedge \mathbf{n}(\sigma) \right] \frac{e^{-ik|\sigma - \sigma'|}}{|\sigma - \sigma'|} d\sigma \end{cases} \quad (1.18)$$

On pose

$$\begin{cases} \mathbf{E}_0(x; k\xi) = 0 \\ \mathbf{E}_l(x; k\xi) = \mathbf{E}_{l-1}(x; k\xi) \\ \quad + \frac{ik}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left(\mathbf{J}_l(\sigma) - \left(\frac{x-\sigma}{|x-\sigma|} \cdot \mathbf{J}_l(\sigma) \right) \frac{x-\sigma}{|x-\sigma|} \right) \frac{e^{-ik|x-\sigma|}}{|x-\sigma|} d\gamma(\sigma) \end{cases} \quad (1.19)$$

et

$$\begin{cases} \mathbf{H}_0(x; k\xi) = 0 \\ \mathbf{H}_l(x; k\xi) = \mathbf{H}_{l-1}(x; k\xi) \\ \quad + \frac{ik}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left(\frac{x-\sigma}{|x-\sigma|} \wedge \mathbf{J}_l(\sigma) \right) \frac{e^{-ik|x-\sigma|}}{|x-\sigma|} d\gamma(\sigma) \end{cases} \quad (1.20)$$

On a alors le théorème suivant comparant cette méthode et l'approximation de l'optique géométrique :

Théorème 1.2 *Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^3 , extérieur d'un domaine Ω' réunion finie et disjointe de compacts strictement convexes réguliers. Soit $x \in \Omega \setminus \mathcal{T}$. Si $\mathcal{C}_n(x) = \emptyset$ pour $n > l$ alors*

$$\mathbf{e}_0^I(x) e^{-ik\xi \cdot x} + \mathbf{E}_l(x; k\xi) - \mathbf{E}_{0.G.}(x; k\xi) = O\left(\frac{1}{k}\right) \quad (1.21)$$

et

$$\mathbf{h}_0^I(x) e^{-ik\xi \cdot x} + \mathbf{H}_l(x; k\xi) - \mathbf{H}_{0.G.}(x; k\xi) = O\left(\frac{1}{k}\right) \quad (1.22)$$

localement uniformément en x .

Chapitre 2

Notations et propriétés

2.1 Notations

2.1.1 Notations différentielles

Soit $(X_i)_{i=1,\dots,m}$ des ouverts de \mathbb{R}^{d_i} et φ une application C^2 :

$$\begin{aligned}\varphi & : X_1 \times \cdots \times X_m & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x = (x_1, \dots, x_m) & \longmapsto & \varphi(x)\end{aligned}$$

avec $x_i = \begin{pmatrix} x_i^1 \\ \vdots \\ x_i^{d_i} \end{pmatrix}$. On note $d = \sum_{i=1}^m d_i$.

on note $\nabla_{x_j} \varphi$ le gradient de la fonction φ sur X_j , $j = 1, \dots, m$, i.e. l'application suivante:

$$\begin{aligned}\nabla_{x_j} \varphi & : X_1 \times \cdots \times X_m & \longrightarrow & \mathbb{R}^{d_j} \\ x = (x_1, \dots, x_m) & \longmapsto & \begin{pmatrix} \partial_{x_j^1} \varphi \\ \vdots \\ \partial_{x_j^{d_j}} \varphi \end{pmatrix} & (x)\end{aligned}$$

on note $\nabla \varphi$ le gradient de la fonction φ , i.e. l'application suivante :

$$\begin{aligned}\nabla \varphi & : X_1 \times \cdots \times X_m & \longrightarrow & \mathbb{R}^d \\ x = (x_1, \dots, x_m) & \longmapsto & \begin{pmatrix} \nabla_{x_1} \varphi \\ \vdots \\ \nabla_{x_m} \varphi \end{pmatrix} & (x)\end{aligned}$$

On note $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ l'espace des matrices à coefficients réels à n lignes et m colonnes.

On note $H_{x_i,x_j}\varphi$ l'application

$$H_{x_i,x_j}\varphi : X_1 \times \cdots \times X_m \longrightarrow \mathcal{M}_{d_i,d_j}(\mathbb{R})$$

$$x = (x_1, \dots, x_m) \longmapsto \begin{bmatrix} \partial_{x_i^1, x_j^1}^2 \varphi & \cdots & \partial_{x_i^1, x_j^{d_j}}^2 \varphi \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_i^{d_i}, x_j^1}^2 \varphi & \cdots & \partial_{x_i^{d_i}, x_j^{d_j}}^2 \varphi \end{bmatrix} (x)$$

On note aussi $\nabla_{x_i}(\nabla_{x_j}\varphi) = H_{x_i,x_j}\varphi$

On appelle hessien sur X_j de la fonction φ et on note $\text{Hess}_{x_j}\varphi$ l'application $H_{x_j,x_j}\varphi$. On appelle hessien de la fonction φ au point x et on note $\text{Hess}\varphi(x)$ la matrice de $\mathcal{M}_{d,d}(\mathbb{R})$ suivante

$$\text{Hess}\varphi(x) = \begin{bmatrix} H_{x_1,x_1}\varphi & \cdots & H_{x_1,x_m}\varphi \\ \vdots & & \vdots \\ H_{x_m,x_1}\varphi & \cdots & H_{x_m,x_m}\varphi \end{bmatrix} (x)$$

Soit X un ouvert de \mathbb{R}^n à bord C^∞ compact, de complémentaire une réunion finie de compacts strictement convexes. Soit ∂X_ϵ le voisinage de la sous variété ∂X dans \mathbb{R}^n constitué des points de \mathbb{R}^n dont la distance à ∂X est inférieure à ϵ . Par hypothèse la sous variété ∂X est régulière et donc il existe $\epsilon > 0$ tel que ∂X_ϵ est régulière et tout point $x \in \partial X_\epsilon$ est projeté de manière unique sur ∂X en un point $P(x)$.

A toute fonction f définie sur ∂X , on associe la fonction \tilde{f} définie sur ∂X_ϵ par $\tilde{f}(x) = f(P(x))$. La fonction \tilde{f} est constante le long d'une normale à ∂X . Pour $\sigma \in \partial X$, le vecteur $\nabla \tilde{f}(\sigma)$ appartient au plan tangent en σ à ∂X . Ce vecteur du plan tangent est appelé gradient surfacique de la fonction f au point $\sigma \in \partial X$ et noté $\nabla^S f(\sigma)$.

Lorsqu'il n'y aura aucune ambiguïté on notera $\nabla^S f(\sigma) = \nabla f(\sigma)$

Soit $(X_i)_{i=1,\dots,m}$ des ouverts de \mathbb{R}^{d_i} du type précédent et φ une application C^2 :

$$\varphi : \partial X_1 \times \cdots \times \partial X_m \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_m) \longmapsto \varphi(\sigma)$$

On définit alors de manière analogue à ci-dessus :

1. $\nabla_{\sigma_i}^S \varphi$ le gradient surfacique sur ∂X_i de la fonction φ ,
2. $H_{\sigma_i, \sigma_j}^S \varphi$,

3. $\text{Hess}_{\sigma_i}^S \varphi$ le hessien surfacique sur ∂X_i de la fonction φ ,
4. $\text{Hess}^S \varphi$ le hessien surfacique de la fonction φ ,

Lorqu'il n'y aura aucune ambiguïté le symbole S correspondant aux dérivations surfaciques pourra être omis. De plus, on s'efforce tout au long de ce travail d'utiliser les variables x pour désigner un élément de \mathbb{R}^n et les variables σ pour désigner un élément d'un bord.

On note ξ la direction de propagation de l'onde incidente plane avec $|\xi| = 1$.

Pour une fonction φ sur Ω , dite fonction phase, on appelle surface d'onde, notée Σ , l'une de ses surfaces de niveau, i.e. :

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(x) = \varphi_\Sigma\}$$

2.1.2 Notations pour l'optique géométrique et l'optique physique

Soit Ω un ouvert complémentaire de $\cup_{i=1}^N K_i$ où K_i sont des compacts disjoints strictement convexes. On suppose $\partial\Omega$ régulière (i.e. C^∞).

- On note $(\partial\Omega)_*^l$ l'ouvert de $(\partial\Omega)^l$ des éléments $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ tels que

$$\sigma_j \in \partial K_i \text{ et } \sigma_{j+1} \in \partial K_{i'} \implies j \neq j'$$

- On définit la phase ψ_l par :

$$\begin{aligned} \psi_l : \Omega \times (\partial\Omega)_*^l &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, \sigma_1, \dots, \sigma_l) &\longmapsto \xi \cdot \sigma_1 + \sum_{j=1}^{l-1} |\sigma_{j+1} - \sigma_j| + |x - \sigma_l| \end{aligned}$$

- On rappelle qu'un **l-chemin généralisé passant par x** , est un l -uplet $(\sigma_1, \dots, \sigma_l) \in (\partial\Omega)_*^l$ tel que :

1. $\xi \cdot n(\sigma_1) < 0$ et $(\sigma_{j+1} - \sigma_j) \cdot n(\sigma_{j+1}) < 0$ pour $j \in \{1, \dots, l-1\}$,
2. La phase $\psi_l(x, \bullet)$ stationne sur $(\partial\Omega)_*^l$ en $(\sigma_1, \dots, \sigma_l)$.

On note $\mathcal{C}_l(x)$ l'ensemble des l -chemins généralisés passant par x et $\mathcal{C}(x) = \cup_l \mathcal{C}_l(x)$.

- On rappelle qu'une **l-ombre portée généralisée des contours apparents**, est l'ensemble des points $x \in \Omega$ tel qu'il existe $\nu = (\sigma_1, \dots, \sigma_l) \in (\partial\Omega)_*^l$ vérifiant

1. $\xi \cdot n(\sigma_1) = 0$ ou $\exists j \in \{1, \dots, l-1\}$ tel que $(\sigma_{j+1} - \sigma_j) \cdot n(\sigma_{j+1}) = 0$,
2. La phase $\psi_l(x, \bullet)$ stationne sur $(\partial\Omega)_*^l$ en $(\sigma_1, \dots, \sigma_l)$.

On note \mathcal{T}_l l'ensemble des l -contours généralisés et $\mathcal{T} = \cup_l \mathcal{T}_l$.

- On définit, pour $x \in \Omega \setminus \mathcal{T}$, et pour $\nu = (\sigma_1, \dots, \sigma_l)$ un élément de $\mathcal{C}_l(x)$, les l matrices suivantes :

$$\begin{cases} M_1^\nu = H_{\sigma_1, \sigma_1}^S \psi_l(x, \nu) \\ \text{et } \forall j \in \{2, \dots, l\} \\ M_j^\nu = H_{\sigma_j, \sigma_j}^S \psi_l(x, \nu) - H_{\sigma_{j-1}, \sigma_j}^S \psi_l(x, \nu) [M_{j-1}^\nu]^{-1} H_{\sigma_j, \sigma_{j-1}}^S \psi_l(x, \nu) \end{cases} \quad (2.1)$$

Remarque : On montrera au Lemme 3.3 que M_j^ν est inversible.

- On appelle **l -rayon passant par x** un l -uplet $\rho = (\sigma_1, \dots, \sigma_l) \in (\partial\Omega)_*^l$ tel que
 1. $\forall i \in \{1, \dots, l\}]\sigma_i, \sigma_{i+1}[\cap \Omega' = \emptyset$,
 2. $\{\sigma_1 - t\xi ; t > 0\} \cap \Omega' = \emptyset$,
 3. loi de réflexion spéculaire

$$\begin{cases} \xi \cdot n(\sigma_1) = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{|\sigma_1 - \sigma_2|} \cdot n(\sigma_1) \\ \text{et } \forall i \in \{2, \dots, l\} \\ \frac{\sigma_i - \sigma_{i-1}}{|\sigma_i - \sigma_{i-1}|} \cdot n(\sigma_i) = \frac{\sigma_i - \sigma_{i+1}}{|\sigma_i - \sigma_{i+1}|} \cdot n(\sigma_i) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \exists \lambda_1 \in \mathbb{R}^* \text{ vérifiant } \xi + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{|\sigma_1 - \sigma_2|} = \lambda_1 n(\sigma_1) \\ \text{et } \forall i \in \{2, \dots, l\} \exists \lambda_i \in \mathbb{R}^* \text{ vérifiant} \\ \frac{\sigma_i - \sigma_{i-1}}{|\sigma_i - \sigma_{i-1}|} + \frac{\sigma_i - \sigma_{i+1}}{|\sigma_i - \sigma_{i+1}|} = \lambda_i n(\sigma_i) \end{cases}$$

Ici $\sigma_{l+1} = x$ et $n(\sigma)$ est la normale extérieure à $\partial\Omega$ en σ .

On note $\mathcal{R}_l(x)$ l'ensemble des l -rayons passant par x et $\mathcal{R}(x) = \cup_l \mathcal{R}_l(x)$.

- On appelle **ombre portée des contours apparents** l'ensemble T défini par

$$T = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \exists l \in \mathbb{N}^* \exists \rho = (\sigma_1, \dots, \sigma_l) \in \mathcal{R}_l(x) \right. \\ \left. \text{tel que } \xi \cdot n(\sigma_1) = 0 \text{ ou } \exists i \in \{1, \dots, l\} (\sigma_i - \sigma_{i+1}) \cdot n(\sigma_i) = 0 \right\}$$

Ici $\sigma_{l+1} = x$.

- Soit $\sigma > 0$, on note $\mathcal{S}_\sigma \subset \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices A telles que $I + \sigma A$ soit inversible. On note S_σ l'application suivante:

$$\begin{aligned} S_\sigma : \mathcal{S}_\sigma &\longrightarrow \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R}) \\ A &\longmapsto A(I + \sigma A)^{-1} \end{aligned}$$

Remarque: Si A est une matrice symétrique appartenant à \mathcal{S}_σ ($\sigma > 0$) alors $S_\sigma(A)$ est une matrice symétrique.

- Soit $B \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, $\eta \in \mathbb{R}^3$, $\zeta \in \mathbb{R}^3$. On suppose $(\zeta, \eta) \neq 0$. On note $T_{B,\eta,\zeta}$ l'application de $\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ dans lui-même donnée par :
 $\forall A \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R}) \forall x \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} (T_{B,\eta,\zeta}(A))x &= (A - 2(\zeta, \eta)B)x - 2(\eta, x)(A\eta + B\zeta) \\ &\quad - 2(A\eta + B\zeta, x)\eta + 2 \left[2(A\eta, \eta) - \frac{(B\zeta, \zeta)}{(\zeta, \eta)} \right] (\eta, x)\eta \end{aligned}$$

Remarque: Si A est une matrice symétrique alors $(T_{B,\eta,\zeta}(A))$ l'est aussi.

- Soit Σ une surface de \mathbb{R}^3 et σ un point de Σ . On appelle **matrice de courbure de Σ au point σ** la matrice de Weingarten dans le plan tangent à Σ au point σ , prolongée à \mathbb{R}^3 par 0 dans la direction $n(\sigma)$ (normale extérieure à la surface).
- Soit $x \in \Omega$ et $\rho = (\sigma_1, \dots, \sigma_l) \in \mathcal{C}_l(x)$. On dit que le l -chemin généralisé ρ passant par x réalise :

1. une condition de transmission au point σ_i ($i = 1, \dots, l$) si

$$\begin{cases} \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{|\sigma_2 - \sigma_1|} = \xi & \text{pour } i = 1 \\ \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_i}{|\sigma_{i+1} - \sigma_i|} = \frac{\sigma_i - \sigma_{i-1}}{|\sigma_i - \sigma_{i-1}|} & \text{pour } i \in \{2, \dots, l\} \end{cases}$$

2. une condition de réflexion au point σ_i ($i = 1, \dots, l$) si

$$\begin{cases} \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{|\sigma_2 - \sigma_1|} = \xi - 2(\xi \cdot n(\sigma_1))n(\sigma_1) & \text{pour } i = 1 \\ \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_i}{|\sigma_{i+1} - \sigma_i|} = \frac{\sigma_i - \sigma_{i-1}}{|\sigma_i - \sigma_{i-1}|} - 2 \left(\frac{\sigma_i - \sigma_{i-1}}{|\sigma_i - \sigma_{i-1}|} \cdot n(\sigma_i) \right) n(\sigma_i) & \text{pour } i \in \{2, \dots, l\} \end{cases}$$

Remarque : On montrera (lemme 3.1) que tout l -chemin $(\sigma_1, \dots, \sigma_l)$ réalise, en σ_i , une condition de transmission ou une condition de réflexion.

- On note $\mathcal{M}_{3,3}^{0+}$ l'ensemble des matrices symétriques appartenant à $\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ dont l'une des valeurs propres est nulle et les deux autres strictement positives .
- Soit $x \in \Omega \setminus \mathcal{T}$ et $\nu = (\sigma_1, \dots, \sigma_l) \in \mathcal{C}_l(x)$. On définit par récurrence les l matrices symétriques P_j^ν appartenant à $\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$:

$$P_1^\nu = \begin{cases} 0 & \text{si } \nu \text{ réalise une condition de transmission en } \sigma_1 \\ T_{B(\sigma_1), n(\sigma_1), \xi}(0) & \text{si } \nu \text{ réalise une condition de réflexion en } \sigma_1 \end{cases}$$

et

$$P_j^\nu = \begin{cases} S_{|\sigma_j - \sigma_{j-1}|}(P_{j-1}^\nu) & \text{si } \nu \text{ réalise une condition de} \\ & \text{transmission en } \sigma_j \\ T_{B(\sigma_j), n(\sigma_j), \frac{\sigma_j - \sigma_{j-1}}{|\sigma_j - \sigma_{j-1}|}}(S_{|\sigma_j - \sigma_{j-1}|}(P_{j-1}^\nu)) & \text{si } \nu \text{ réalise une condition de} \\ & \text{réflexion en } \sigma_j \end{cases}$$

où $B(\sigma_j)$ désigne la matrice de courbure de $\partial\Omega$ au point σ_j .

Remarque :

- On montrera (Propriété 2.3) que pour $x \in \Omega \setminus \mathcal{T}$ et $\rho = (\sigma_1, \dots, \sigma_l) \in \mathcal{C}_l(x)$, on a :

$$\forall i \in \{1, \dots, l-1\} \quad P_i^\rho \in \mathcal{S}_{|\sigma_{i+1} - \sigma_i|}$$

- Par définition , $\rho = (\sigma_1, \dots, \sigma_l) \in \mathcal{C}_l(x)$ entraîne

$$n(\sigma_1), \xi < 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in \{2, \dots, l\} \quad (\sigma_j - \sigma_{j-1}) \cdot n(\sigma_j) < 0$$

- Soit $v \in \mathbb{R}^3$, on note \mathcal{F}_v l'application suivante

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_v &: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ x &\longmapsto x - 2(x, v)v \end{aligned}$$

- Soit $(v_1, \dots, v_l) \in \mathbb{R}^{3l}$, on note $\mathcal{G}_{(v_1, \dots, v_l)}$ l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{(v_1, \dots, v_l)} &: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ x &\longmapsto \mathcal{F}_{v_l} \circ \dots \circ \mathcal{F}_{v_1}(x) \end{aligned}$$

- Soit η, η' deux éléments de \mathbb{R}^3 . On définit pour tout $v \in \mathbb{R}^3$

$$\mathcal{H}_{(\eta, \eta')}(v) = \eta \wedge [v \wedge \eta']$$

et

$$\mathcal{E}_{(\eta, \eta')}(v) = [v \wedge \eta'] - (\eta, v \wedge \eta')\eta$$

- Soit $x \in \Omega \setminus \mathcal{T}$ et $\nu = (\sigma_1, \dots, \sigma_l) \in \mathcal{C}_l(x)$ Notons

$$\mathcal{E}^\nu = \left(\circ_{j=1}^l \mathcal{E}_{\left(\frac{\sigma_{j+1} - \sigma_j}{|\sigma_{j+1} - \sigma_j|}, n(\sigma_j) \right)} \right)$$

$$\mathcal{H}^\nu = \left(\circ_{j=1}^l \mathcal{H}_{\left(\frac{\sigma_{j+1} - \sigma_j}{|\sigma_{j+1} - \sigma_j|}, n(\sigma_j) \right)} \right)$$

2.2 Propriétés

2.2.1 Propriétés de l'ensemble \mathcal{S}_σ et de l'application S_σ

L'ensemble \mathcal{S}_σ et l'application S_σ vérifient les propriétés immédiates suivantes

Propriété 2.1 1. Pour tout réel σ , $0 \in \mathcal{S}_\sigma$ et $S_\sigma(0) = 0$

2. Soit $A \in \mathcal{M}_{3,3}^{0+}$. Alors pour tout $\sigma > 0$ on a

$$A \in \mathcal{S}_\sigma \text{ et } S_\sigma(A) \in \mathcal{M}_{3,3}^{0+}$$

3. Soit $\sigma > 0$, A une matrice symétrique appartenant à \mathcal{S}_σ et $\zeta \in \mathbb{R}^3$ avec $|\zeta| = 1$.

Si $A\zeta = 0$ alors $S_\sigma(A)\zeta = 0$.

4. Soit σ et σ' deux réels strictement positifs, $\sigma' < \sigma$ et A une matrice réelle symétrique appartenant à $\mathcal{S}_\sigma \cap \mathcal{S}_{\sigma'}$ et possédant une valeur propre nulle.

On a

$$r_-(I + \sigma A) = r_-(I + \sigma' A) + r_-(I + |\sigma' - \sigma| S_{\sigma'}(A))$$

où $r_-(B)$ est le nombre de valeurs propres strictement négatives de la matrice B .

2.2.2 Propriété de l'application $T_{B,\eta,\zeta}$

Propriété 2.2 Soit A et B deux matrices symétriques appartenant à $\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$, $\eta \in \mathbb{R}^3$ et $\zeta \in \mathbb{R}^3$ avec $|\eta| = |\zeta| = 1$. On suppose $\zeta \cdot \eta < 0$, $A\zeta = 0$ et $B\eta = 0$. Alors

$$(i) (T_{B,\eta,\zeta}(A)) (\zeta - 2(\zeta, \eta)\eta) = 0$$

(ii) On suppose $B \in \mathcal{M}_{3,3}^{0+}$. Si $A = 0$ ou si $A \in \mathcal{M}_{3,3}^{0+}$ alors $T_{B,\eta,\zeta}(A) \in \mathcal{M}_{3,3}^{0+}$

Preuve :

(i) Après simplification, on a

$$(T_{B,\eta,\zeta}(A)) (\zeta - 2(\zeta, \eta)\eta) = A\zeta + 4(\zeta, \eta)^2 B\eta + 4(\zeta, \eta)(B\zeta, \eta)\eta - 2(A\eta, \zeta)\eta$$

Par hypothèse A et B sont des matrices réelles symétriques vérifiant $A\zeta = 0$ et $B\eta = 0$.

Ceci implique :

$$(B\zeta, \eta) = (\zeta, B\eta) = 0$$

et

$$(A\eta, \zeta) = (\eta, A\zeta) = 0$$

On obtient donc

$$(T_{B,\eta,\zeta}(A)) (\zeta - 2(\zeta, \eta)\eta) = 0$$

(ii) Soit $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $v \cdot (\zeta - 2(\zeta, \eta)\eta) = 0$. On a

$$\begin{aligned} ((T_{B,\eta,\zeta}(A)) v, v) &= (A(v - 2(v, \eta)\eta), v - 2(v, \eta)\eta) \\ &\quad - \frac{2}{(\zeta, \eta)} (B((\zeta, \eta)v + (\eta, v)\zeta), (\zeta, \eta)v + (\eta, v)\zeta) \end{aligned}$$

Comme

$$(v - 2(v, \eta)\eta, \zeta) = (v, \zeta - 2(\zeta, \eta)\eta) = 0$$

on a

$$(A(v - 2(v, \eta)\eta), v - 2(v, \eta)\eta) > 0$$

De plus, comme $(\zeta, \eta) < 0$ on a

$$-\frac{2}{(\zeta, \eta)} (B((\zeta, \eta)v + (\eta, v)\zeta), (\zeta, \eta)v + (\eta, v)\zeta) \leq 0$$

On obtient donc

$$((T_{B,\eta,\zeta}(A))v, v) > 0$$

c'est à dire $T_{B,\eta,\zeta}(A) \in \mathcal{M}_{3,3}^{0+}$

C.Q.F.D.

2.2.3 Propriété des matrices P_j^ρ

Propriété 2.3 Soit $x \in \Omega \setminus \mathcal{T}$ et $\rho = (\sigma_1, \dots, \sigma_l) \in \mathcal{C}_l(x)$.

Soit m le minimum des $j \in \{1, \dots, l\}$ tels que ρ réalise une condition de réflexion en σ_j alors

$$\forall i \in \{1, \dots, m-1\}, \forall \sigma > 0 \quad P_i^\rho = 0$$

et

$$\forall k \in \{m, \dots, l\}, \forall \sigma > 0 \quad P_k^\rho \in \mathcal{S}_\sigma \quad \text{et} \quad P_k^\rho \in \mathcal{M}_{3,3}^{0+}$$

Preuve :

Ceci découle de la définition de m , P_i^ρ , et des propriétés 2.1 et 2.2

2.2.4 Propriétés des applications $\mathcal{E}_{(\zeta,\eta)}$, $\mathcal{H}_{(\zeta,\eta)}$ et \mathcal{F}_η

Propriété 2.4 Soit e, h, ζ, η des vecteurs de \mathbb{R}^3 vérifiant

$$\begin{aligned} \zeta \cdot e &= 0 & \zeta \cdot h &= 0 \\ \zeta \wedge e &= h & \zeta \wedge h &= -e \\ |\zeta| &= |\eta| = 1 \end{aligned}$$

On note

$$\begin{aligned} \zeta' &= \mathcal{F}_\eta(\zeta) \\ \begin{cases} e' = \mathcal{E}_{(\zeta',\eta)}(h) \\ h' = \mathcal{H}_{(\zeta',\eta)}(h) \end{cases} & \text{et} \quad \begin{cases} e'' = \mathcal{E}_{(\zeta,\eta)}(h) \\ h'' = \mathcal{H}_{(\zeta,\eta)}(h) \end{cases} \end{aligned}$$

alors

$$\begin{cases} e' = (\zeta, \eta) \mathcal{F}_\eta(e) \\ h' = -(\zeta, \eta) \mathcal{F}_\eta(h) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} e'' = (\zeta, \eta) e \\ h'' = (\zeta, \eta) h \end{cases}$$

De plus

$$\begin{cases} \zeta' \cdot e' = 0 & \zeta' \cdot h' = 0 \\ \zeta' \wedge e' = h' & \zeta' \wedge h' = -e' \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \zeta \cdot e'' = 0 & \zeta \cdot h'' = 0 \\ \zeta \wedge e'' = h'' & \zeta \wedge h'' = -e'' \end{cases}$$

Preuve :

Soit (u, v, η) une base orthonormée de \mathbb{R}^3 .

$$\begin{aligned} h' &= \begin{pmatrix} \zeta_u \\ \zeta_v \\ -\zeta_\eta \end{pmatrix} \wedge \left[\begin{pmatrix} h_u \\ h_v \\ h_\eta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} -\zeta_\eta h_u \\ -\zeta_\eta h_v \\ -\zeta_u h_u - \zeta_v h_v \end{pmatrix} \\ &= -(\zeta, \eta)(h - 2(h, \eta)\eta) \end{aligned}$$

$$e' = [(\zeta \wedge e) \wedge \eta] - (\zeta', (\zeta \wedge e) \wedge \eta)\zeta'$$

or

$$\begin{aligned} (\zeta \wedge e) \wedge \eta &= \left(\begin{pmatrix} \zeta_u \\ \zeta_v \\ \zeta_\eta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} e_u \\ e_v \\ e_\eta \end{pmatrix} \right) \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \zeta_\eta e_u - \zeta_u e_\eta \\ \zeta_\eta e_v - \zeta_v e_\eta \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e' &= \begin{pmatrix} \zeta_\eta e_u - \zeta_u e_\eta \\ \zeta_\eta e_v - \zeta_v e_\eta \\ 0 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} \zeta_u \\ \zeta_v \\ -\zeta_\eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \zeta_\eta e_u - \zeta_u e_\eta \\ \zeta_\eta e_v - \zeta_v e_\eta \\ 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \zeta_u \\ \zeta_v \\ -\zeta_\eta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e_u \zeta_\eta - e_\eta \zeta_u (1 - \zeta_u^2 - \zeta_v^2) - \zeta_u \zeta_\eta (e_u \zeta_u + e_v \zeta_v) \\ e_v \zeta_\eta - e_\eta \zeta_v (1 - \zeta_u^2 - \zeta_v^2) - \zeta_v \zeta_\eta (e_u \zeta_u + e_v \zeta_v) \\ \zeta_\eta^2 (e_u \zeta_u + e_v \zeta_v) - e_\eta \zeta_\eta (\zeta_u^2 + \zeta_v^2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e_u \zeta_\eta - \zeta_u \zeta_\eta (e_u \zeta_u + e_v \zeta_v + e_\eta \zeta_\eta) \\ e_v \zeta_\eta - \zeta_v \zeta_\eta (e_u \zeta_u + e_v \zeta_v + e_\eta \zeta_\eta) \\ \zeta_\eta^2 (e_u \zeta_u + e_v \zeta_v + e_\eta \zeta_\eta) - e_\eta \zeta_\eta \end{pmatrix} \\ &= (\zeta, \eta)(e - 2(e, \eta)\eta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h'' &= \begin{pmatrix} \zeta_u \\ \zeta_v \\ \zeta_\eta \end{pmatrix} \wedge \left[\begin{pmatrix} h_u \\ h_v \\ h_\eta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{pmatrix} \zeta_\eta h_u \\ \zeta_\eta h_v \\ -\zeta_u h_u - \zeta_v h_v \end{pmatrix} \\
&= (\zeta, \eta)h
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e'' &= [(\zeta \wedge e) \wedge \eta] - (\zeta, (\zeta \wedge e) \wedge \eta)\zeta \\
&= \begin{pmatrix} \zeta_\eta e_u - \zeta_u e_\eta \\ \zeta_\eta e_v - \zeta_v e_\eta \\ 0 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} \zeta_u \\ \zeta_v \\ \zeta_\eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \zeta_\eta e_u - \zeta_u e_\eta \\ \zeta_\eta e_v - \zeta_v e_\eta \\ 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \zeta_u \\ \zeta_v \\ \zeta_\eta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e_u \zeta_\eta - e_\eta \zeta_u (1 - \zeta_u^2 - \zeta_v^2) - \zeta_u \zeta_\eta (e_u \zeta_u + e_v \zeta_v) \\ e_v \zeta_\eta - e_\eta \zeta_v (1 - \zeta_u^2 - \zeta_v^2) - \zeta_v \zeta_\eta (e_u \zeta_u + e_v \zeta_v) \\ -\zeta_\eta^2 (e_u \zeta_u + e_v \zeta_v) + e_\eta \zeta_\eta (\zeta_u^2 + \zeta_v^2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e_u \zeta_\eta - \zeta_u \zeta_\eta (e_u \zeta_u + e_v \zeta_v + e_\eta \zeta_\eta) \\ e_v \zeta_\eta - \zeta_v \zeta_\eta (e_u \zeta_u + e_v \zeta_v + e_\eta \zeta_\eta) \\ -\zeta_\eta^2 (e_u \zeta_u + e_v \zeta_v + e_\eta \zeta_\eta) + e_\eta \zeta_\eta \end{pmatrix} \\
&= (\zeta, \eta)e
\end{aligned}$$

Montrons que $\zeta' \cdot e' = 0$. On a

$$\begin{aligned}
\zeta' \cdot e' &= (\zeta, \eta)(\zeta - 2(\zeta, \eta)\eta) \cdot (e - 2(e, \eta)\eta) \\
&= (\zeta, \eta)(e, \zeta) \\
&= 0
\end{aligned}$$

De même on a

$$\begin{aligned}
\zeta' \cdot h' &= -(\zeta, \eta)(\zeta - 2(\zeta, \eta)\eta) \cdot (h - 2(h, \eta)\eta) \\
&= (\zeta, \eta)(h, \zeta) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Montrons que $\zeta' \wedge e' = h'$. On a

$$\begin{aligned}
 \zeta' \wedge e' &= \zeta_\eta \begin{pmatrix} \zeta_u \\ \zeta_v \\ \zeta_\eta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} e_u \\ e_v \\ -e_\eta \end{pmatrix} \\
 &= \zeta_\eta \begin{pmatrix} -\zeta_v e_\eta + \zeta_\eta e_v \\ -\zeta_\eta e_u + \zeta_u e_\eta \\ \zeta_u e_v - \zeta_v e_u \end{pmatrix} \\
 &= (\zeta, \eta) (\zeta \wedge e - 2(\zeta \wedge e, \eta)\eta) \\
 &= (\zeta, \eta) h'
 \end{aligned}$$

De même on montre que $\zeta' \wedge h' = -e'$

Les résultats énoncés pour e'' et h'' découle directement des hypothèses sur e et h .

C.Q.F.D.

Chapitre 3

Preuve du théorème 1.1 (équation d'Helmholtz)

La preuve de ce théorème suit la stratégie suivante:

L'approximation de l'optique géométrique est donnée par une somme localement finie de termes, contribution de rayons, qui ne font intervenir que la longueur optique de chaque rayon, et la matrice hessienne de la surface d'onde le long du rayon. L'approximation de Kirchhoff est donnée par une formulation intégrale. Appliquer la technique de la phase stationnaire à cette intégrale l'exprime au premier ordre par des contributions de chemins stationnaires, qui se trouvent être les rayons de l'optique géométrique, portant des amplitudes liées à l'interaction de la surface d'onde et des obstacles.

Toute la difficulté est donc de démontrer l'identité des amplitudes présentes dans l'approximation de l'optique géométrique (exprimées par les matrices notées P_j^g), et les amplitudes présentes dans l'approximation de Kirchhoff (exprimées par les matrices M_j^k). L'objet des paragraphes qui suivent est d'analyser les relations entre ces deux familles de matrices, et de conclure à l'identité des amplitudes portées par les rayons, dans les deux approximations.

On commence par expliciter l'approximation de l'optique géométrique rappelée plus en détail au chapitre 7. Elle est donnée par

$\forall x \in \Omega \setminus T$

$$\begin{aligned} & v_{O.G.}(x; k\xi) \\ &= \\ & \alpha_0(x) e^{-ik\xi \cdot x} + \sum_l \text{loc. finie} (-1)^l \sum_{\rho=(\sigma_1, \dots, \sigma_l) \in \mathcal{R}_l(x)} \frac{\alpha_0(\sigma_1) e^{-ik\psi_l(x; \rho)}}{\prod_{j=1}^l \sqrt{\det(I + |\sigma_{j+1} - \sigma_j| P_j^\rho)}} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Ici $\sigma_{l+1} = x$, $\det(I + |\sigma_{j+1} - \sigma_j| P_j^\rho)$ est positif (propriété 2.3), et corollairement, l'indice de Maslov est nul.

3.1 Nouvelle formulation pour l'itération de Kirchhoff

Soit \mathcal{A}_l la fonction définie sur $(\partial\Omega)_*^l$ par

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}_l(\sigma_1, \dots, \sigma_l) \\ &= \\ & \alpha_0(\sigma_1) (|\xi \cdot n(\sigma_1)| - \xi \cdot n(\sigma_1)) \prod_{j=1}^{l-1} \frac{\left[\left| \frac{\sigma_{j+1} - \sigma_j}{|\sigma_{j+1} - \sigma_j|} \cdot n(\sigma_{j+1}) \right| - \frac{\sigma_{j+1} - \sigma_j}{|\sigma_{j+1} - \sigma_j|} \cdot n(\sigma_{j+1}) \right]}{|\sigma_{j+1} - \sigma_j|} \end{aligned}$$

Cette notation permet d'écrire u_l sous la forme:

$$u_l(x; k\xi) = u_{l-1}(x; k\xi) + \left(\frac{ik}{4\pi} \right)^l \int_{(\partial\Omega)_*^l} \mathcal{A}_l(\sigma_1, \dots, \sigma_l) \frac{e^{-ik\psi_l(x; \sigma_1, \dots, \sigma_l)}}{|x - \sigma_l|} d\sigma_1 \cdots d\sigma_l \quad (3.2)$$

Remarque 3.1 Si

$$\xi \cdot n(\sigma_1) \geq 0$$

ou s'il existe $j \in \{1, \dots, l-1\}$ tel que

$$\frac{\sigma_{j+1} - \sigma_j}{|\sigma_{j+1} - \sigma_j|} \cdot n(\sigma_{j+1}) \geq 0$$

alors

$$\mathcal{A}_l(\sigma_1, \dots, \sigma_l) = 0$$

3.2 Détermination des points de phase stationnaire

Dans le but d'utiliser le théorème de la phase stationnaire sur $(\partial\Omega)_*^l$ il nous faut calculer, pour un point $x \in \mathbb{R}^3$, l'ensemble des points où ψ_l stationne. Pour $x \in \Omega \setminus \mathcal{T}$, on montre que ce sont les l -chemins généralisés passant par x définis au chapitre 2.

Soit à calculer l'ensemble des points $\nu = (\sigma_1, \dots, \sigma_l) \in (\partial\Omega)_*^l$ tels que

$$\nabla_{\nu}^S \psi_l(x; \sigma_1, \dots, \sigma_l) = 0 \quad (3.3)$$

où le gradient surfacique est défini pour la surface $(\partial\Omega)_*^l$.

On a

$$\nabla \tilde{\psi}_l(x; \sigma_1, \dots, \sigma_l) = \begin{pmatrix} \xi - \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{|\sigma_2 - \sigma_1|} \\ \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{|\sigma_2 - \sigma_1|} - \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{|\sigma_3 - \sigma_2|} \\ \vdots \\ \frac{\sigma_l - \sigma_{l-1}}{|\sigma_l - \sigma_{l-1}|} - \frac{x - \sigma_l}{|x - \sigma_l|} \end{pmatrix}$$

La condition (3.3) est équivalente à l'existence de $(\lambda_1, \dots, \lambda_l) \in \mathbb{R}^l$ tel que

$$\nabla \tilde{\psi}_l(x; \sigma_1, \dots, \sigma_l) = \begin{pmatrix} \lambda_1 n(\sigma_1) \\ \vdots \\ \lambda_l n(\sigma_l) \end{pmatrix}$$

où $n(\sigma_i)$ est la normale unitaire extérieure à $\partial\Omega'$ en σ_i .

Pour un tel ν , $(\lambda_1, \dots, \lambda_l) \in \mathbb{R}^l$ est solution des équations suivantes:

$$\begin{cases} \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{|\sigma_2 - \sigma_1|} = \xi - \lambda_1 n(\sigma_1) \\ \frac{\sigma_{j+1} - \sigma_j}{|\sigma_{j+1} - \sigma_j|} = \frac{\sigma_j - \sigma_{j-1}}{|\sigma_j - \sigma_{j-1}|} - \lambda_j n(\sigma_j) \quad \text{pour } j \in \{1, \dots, l\} \end{cases}$$

Comme, par hypothèse, $|\xi| = 1$ on obtient en prenant la norme de chaque équation:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda_1 = 2(\xi, n(\sigma_1))n(\sigma_1) \\ \text{et } \forall j \in \{2, \dots, l\} \\ \lambda_j = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda_j = 2\left(\frac{\sigma_j - \sigma_{j-1}}{|\sigma_j - \sigma_{j-1}|}, n(\sigma_j)\right)n(\sigma_j) \end{cases}$$

On a donc :

Lemme 3.1 Soit $x \in \Omega$. Soit $\nu = (\sigma_1, \dots, \sigma_l) \in (\partial\Omega)_*^l$. On a :

$$\nabla_{\nu}^S \psi_l(x; \nu) = 0$$

si et seulement si

$$\begin{cases} \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{|\sigma_2 - \sigma_1|} = \xi & \text{Transmission} \\ \text{ou} \\ \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{|\sigma_2 - \sigma_1|} = \xi - 2(\xi \cdot n(\sigma_1))n(\sigma_1) & \text{Réflexion} \end{cases}$$

et $\forall j \in \{2, \dots, l\}$

$$\begin{cases} \frac{\sigma_{j+1} - \sigma_j}{|\sigma_{j+1} - \sigma_j|} = \frac{\sigma_j - \sigma_{j-1}}{|\sigma_j - \sigma_{j-1}|} & \text{Transmission} \\ \text{ou} \\ \frac{\sigma_{j+1} - \sigma_j}{|\sigma_{j+1} - \sigma_j|} = \frac{\sigma_j - \sigma_{j-1}}{|\sigma_j - \sigma_{j-1}|} - 2\left(\frac{\sigma_j - \sigma_{j-1}}{|\sigma_j - \sigma_{j-1}|} \cdot n(\sigma_j)\right)n(\sigma_j) & \text{Réflexion} \end{cases}$$

Ici $\sigma_{l+1} = x$.

En utilisant la remarque 3.1 on conclut par

Remarque 3.2 Pour $x \in \Omega \setminus \mathcal{T}$, les points de $(\partial\Omega)_*^l$ où $\psi_l(x, \bullet)$ stationne et où la fonction \mathcal{A}_l est non nulle sont les l -chemins généralisés passant par x .

3.3 Relations entre P_j^ν et M_j^ν

Soit $x \in \Omega \setminus \mathcal{T}$ et $\nu = (\sigma_1, \dots, \sigma_l) \in C_l(x)$.

Dans $\mathfrak{R}_j = (\sigma_j; u_j, v_j, n(\sigma_j))$, $j \in \{1, \dots, l\}$, repère principal de courbure de $\partial\Omega'$ en σ_j , $\partial\Omega'$ est donné au voisinage de σ_j par la paramétrisation $(u, v, g_j(u, v))$. Si U_j et V_j sont les rayons de courbures principaux de $\partial\Omega'$ en σ_j , la matrice de courbure de $\partial\Omega'$ en σ_j , notée $B(\sigma_j)$, est la matrice diagonale de diagonale $(\frac{1}{U_j}, \frac{1}{V_j}, 0)$.

On définit ξ_j , pour $j \in \{1, \dots, l\}$ par :

$$\sigma_{j+1} - \sigma_j = \lambda_j \xi_j \quad \text{avec} \quad \lambda_j = |\sigma_{j+1} - \sigma_j|$$

Ses composantes dans \mathfrak{R}_j sont notées $\xi_j = (\xi_{j,1}, \xi_{j,2}, \xi_{j,3})_{\mathfrak{R}_j}$

Soit $\mathcal{P}^{(l)}$, la matrice de passage de la base $(u_j, v_j, n(\sigma_j))$ à la base $(u_{j+1}, v_{j+1}, n(\sigma_{j+1}))$ et

$$\delta^\nu(\sigma_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } \nu \text{ réalise une condition de transmission en } \sigma_j \\ 1 & \text{si } \nu \text{ réalise une condition de réflexion en } \sigma_j \end{cases}$$

On a :

Lemme 3.2 Soit $x \in \Omega \setminus \mathcal{T}$ et $\nu = (\sigma_1, \dots, \sigma_l) \in C_l(x)$. Alors $\forall j \in \{1, \dots, l\}$

$$M_j^\nu = P_j^\nu|_{T_{\sigma_j}\partial\Omega} + \frac{1}{\lambda_j} \left(I - ({}^t\xi_j\xi_j)|_{T_{\sigma_j}\partial\Omega} \right) \quad (3.4)$$

$$\det M_j^\nu = \frac{(\xi_{j,3})^2}{\lambda_j^2} \det(I + \lambda_j P_j^\nu) \quad (3.5)$$

$$\operatorname{sgn} M_j^\nu = 2 \quad (3.6)$$

$$M_j^\nu \text{ inversible} \quad (3.7)$$

3.3.1 Preuve du Lemme 3.2

Elle s'effectue par récurrence en notant $P_j^\nu = \left[(a_{pq}^{(j)})_{p,q \in \{1,2,3\}} \right]_{\mathfrak{R}_j}$

Au rang 1, on a:

si ν réalise une condition de transmission en σ_1

$$P_1^\nu = 0$$

si ν réalise une condition de réflexion en σ_1

$$P_1^\nu = \begin{bmatrix} -2\frac{\xi_{1,3}}{U_1} & 0 & -2\frac{\xi_{1,1}}{U_1} \\ 0 & -2\frac{\xi_{1,3}}{V_1} & -2\frac{\xi_{1,2}}{V_1} \\ -2\frac{\xi_{1,1}}{U_1} & -2\frac{\xi_{1,2}}{V_1} & -\frac{2}{\xi_{1,3}} \left(\frac{\xi_{1,1}^2}{U_1} + \frac{\xi_{1,2}^2}{V_1} \right) \end{bmatrix}$$

ce qui donne dans les deux cas:

$$P_1^\nu|_{T_{\sigma_j}\partial\Omega} = -2\xi_{1,3}\delta^\nu(\sigma_1)B(\sigma_1)|_{T_{\sigma_j}\partial\Omega}$$

Or

$$\begin{aligned} M_1^\nu &= H_{\sigma_1, \sigma_1}^S \psi_l(x; \nu) \\ &= H_{\sigma_1, \sigma_1}^S (\xi \cdot \sigma_1 + |\sigma_2 - \sigma_1|) \\ &= -2\xi_{1,3}\delta^\nu(\sigma_1)B(\sigma_1)|_{T_{\sigma_j}\partial\Omega} + \frac{1}{\lambda_1} \left(I - (\xi_1 {}^t\xi_1)|_{T_{\partial\Omega}(\sigma_1)} \right) \end{aligned}$$

Ce qui démontre la formule (3.4) au rang 1.

Pour établir la formule (3.5) au rang 1, on utilise les propriétés 2.1 et 2.2 pour obtenir $P_1^\nu \xi_1 = 0$. On pose ensuite

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \xi_{1,1} \\ 0 & 1 & \xi_{1,2} \\ 0 & 0 & \xi_{1,3} \end{bmatrix}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \det(I + \lambda_1 P_1^\nu) &= \frac{1}{(\det H_1)^2} \det({}^t H_1 (I + \lambda_1 P_1^\nu) H_1) \\ &= \frac{1}{\xi_{1,3}^2} \det \begin{bmatrix} 1 + \lambda_1 a_{11}^{(1)} & \lambda_1 a_{12}^{(1)} & \xi_{1,1} \\ \lambda_1 a_{12}^{(1)} & 1 + \lambda_1 a_{22}^{(1)} & \xi_{1,2} \\ \xi_{1,1} & \xi_{1,2} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Comme $|\xi_1| = 1$, on obtient à l'aide de la formule (3.4) au rang 1:

$$\det(I + \lambda_1 P_1^\nu) = \frac{\lambda_1^2}{(\xi_{1,3})^2} \det M_1^\nu$$

Il reste donc, à établir la formule (3.6) au rang 1.

On a vu (propriété 2.3) que $\det(I + \lambda_1 P_1^\nu) > 0$. De plus, il est clair que $\text{Tr } M_1^\nu > 0$. Ceci donne $\text{sgn } M_j^\nu = 2$.

Remarque : On a montré que $\det M_1^\nu > 0$ et par conséquent M_1^ν est inversible.

Au rang $j + 1$: on suppose les formules (3.4), (3.5) et (3.6) vraies jusqu'au rang j ($j < l$). On va démontrer qu'elles sont vraies au rang $j + 1$.

On commence par établir la formule (3.4). Pour ceci on effectue la suite des calculs suivants:

1. Calcul de $(P_{j+1}^\nu)_{\mathfrak{R}_{j+1}}$,
2. Calcul de M_{j+1}^ν ,
3. Calcul de $D = (P_{j+1}^\nu)_{|T_{\partial\Omega}(\sigma_{j+1})} + \frac{1}{\lambda_{j+1}} \left(I - (\xi_{j+1} \quad {}^t \xi_{j+1})_{|T_{\partial\Omega}(\sigma_{j+1})} \right) - M_{j+1}^\nu$

1. Calcul de $(P_{j+1}^\nu)_{\mathfrak{R}_{j+1}}$

On calcule tout d'abord $S_{\lambda_j}(P_j^\nu)_{\mathfrak{R}_j}$. On a

$$\det(I + \lambda_j P_j^\nu)(S_{\lambda_j}(P_j^\nu))_{\mathfrak{R}_j} = (P_j^\nu)_{\mathfrak{R}_j} + \lambda_j (b_{pq})_{p,q \in \{1,2,3\}} + \lambda_j^2 \det P_j^\nu I$$

avec

$$\begin{aligned} b_{pp} &= a_{pp}^{(j)}(a_{p+1,p+1}^{(j)} + a_{p+2,p+2}^{(j)}) - (a_{p,p+1}^{(j)})^2 - (a_{p,p-1}^{(j)})^2 \\ b_{pq} &= a_{pq}^{(j)} a_{kk}^{(j)} - a_{pk}^{(j)} a_{qk}^{(j)} \quad p \neq q, \quad k \neq p, \quad k \neq q \end{aligned}$$

Or $\det P_j^\nu = 0$, ceci donne :

$$(S_{\lambda_j}(P_j^\nu))_{\mathfrak{R}_j} = \frac{1}{\det(I + \lambda_j P_j^\nu)} \left((P_j^\nu)_{\mathfrak{R}_j} + \lambda_j (b_{pq})_{p,q \in \{1,2,3\}} \right)$$

On l'exprime ensuite dans \mathfrak{R}_{j+1} à l'aide de la matrice de passage $\mathcal{P}^{(j)}$:

$$\begin{aligned} (S_{\lambda_j}(P_j^\nu))_{\mathfrak{R}_{j+1}} &= \frac{1}{\det(I + \lambda_j P_j^\nu)} {}^t \mathcal{P}^{(j)} \left((P_j^\nu)_{\mathfrak{R}_j} + \lambda_j (b_{pq})_{p,q \in \{1,2,3\}} \right) \mathcal{P}^{(j)} \\ &= \frac{1}{\det(I + \lambda_j P_j^\nu)} \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 p_{iq}^{(j)} p_{kp}^{(j)} (a_{ki}^{(j)} + \lambda_j b_{ki}) \right)_{p,q \in \{1,2,3\}} \end{aligned}$$

On note

$$(w_{pq})_{p,q \in \{1,2,3\}} = \det(I + \lambda_j P_j^\nu) (S_{\lambda_j}(P_j^\nu))_{\mathfrak{R}_{j+1}}$$

Si ν réalise une condition de transmission en σ_{j+1} alors

$$(P_{j+1}^\nu)_{\mathfrak{R}_{j+1}} = (S_{\lambda_j}(P_j^\nu))_{\mathfrak{R}_{j+1}}$$

Si ν réalise une condition de réflexion en σ_{j+1} alors

$$(P_{j+1}^\nu)_{\mathfrak{R}_{j+1}} = \begin{bmatrix} w_{11} - 2 \frac{\xi_{j+1,3}}{U_{j+1}} & w_{12} & -w_{13} - 2 \frac{\xi_{j+1,1}}{U_{j+1}} \\ w_{12} & w_{22} - 2 \frac{\xi_{j+1,3}}{V_{j+1}} & -w_{23} - 2 \frac{\xi_{j+1,2}}{V_{j+1}} \\ -w_{13} - 2 \frac{\xi_{j+1,1}}{U_{j+1}} & -w_{23} - 2 \frac{\xi_{j+1,2}}{V_{j+1}} & w_{33} - \frac{2}{\xi_{j+1,3}} \left(\frac{\xi_{j+1,1}^2}{U_{j+1}} + \frac{\xi_{j+1,2}^2}{V_{j+1}} \right) \end{bmatrix}$$

On a donc dans les deux cas:

$$\left((P_{j+1}^\nu)_{\mathfrak{R}_{j+1}} \right)_{|T_{\sigma_{j+1}} \partial \Omega} = \left((S_{\lambda_j}(P_j^\nu))_{\mathfrak{R}_{j+1}} \right)_{|T_{\sigma_{j+1}} \partial \Omega} - 2\delta^\nu (\sigma_{j+1} \xi_{j+1,3} B(\sigma_{j+1}))_{|T_{\sigma_{j+1}} \partial \Omega} \quad (3.8)$$

2. Calcul de M_{j+1}^ν .

On calcule tout d'abord $H_{\sigma_{j+1}, \sigma_j}^S \psi_l(x; \nu) [M_j^\nu]^{-1} H_{\sigma_j, \sigma_{j+1}}^S \psi_l(x; \nu)$.

Par construction de ψ_l , on a :

$$H_{\sigma_{j+1}, \sigma_j}^S \psi_l(x; \nu) = H_{\sigma_{j+1}, \sigma_j}^S | \sigma_{j+1} + \sigma_j |$$

Ceci donne, dans les coordonnées locales du repère \mathfrak{R}_j

$$H_{\sigma_{j+1}, \sigma_j}^S \psi_l(x; \nu) = \frac{1}{\lambda_j} (l_{kq})_{k,q \in \{1,2\}}$$

où $l_{kq} = \sum_{i=1}^3 p_{ik}^{(j)} \xi_{j,i} \xi_{j,q} - p_{qk}^{(j)}$

On note

$$M_j^\nu = (m_{kq})_{k,q \in \{1,2\}}$$

où $m_{kq} = a_{kq}^{(j)} + \frac{1}{\lambda_j} (\delta_{kq} - \xi_{j,k} \xi_{j,q})$.

Comme M_j^ν est inversible, on a :

$$H_{\sigma_{j+1}, \sigma_j}^S \psi_l(x; \nu) [M_j^\nu]^{-1} H_{\sigma_j, \sigma_{j+1}}^S \psi_l(x; \nu) = \frac{1}{\lambda_j^2 \det M_j^\nu} (t_{kq})_{k,q \in \{1,2\}}$$

avec

$$t_{kq} = \sum_{i=1}^2 \sum_{r=1}^2 (-1)^{i+r} l_{k,i+1} l_{q,r+1} m_{ir}$$

On détermine ensuite $H_{\sigma_{j+1}, \sigma_{j+1}}^S \psi_l(x; \nu)$. Par construction de ψ_l , on a :

$$H_{\sigma_{j+1}, \sigma_{j+1}}^S \psi_l(x; \nu) = H_{\sigma_{j+1}, \sigma_{j+1}}^S (|\sigma_{j+1} - \sigma_j| + |\sigma_{j+2} - \sigma_{j+1}|)$$

Après calcul dans le repère \mathfrak{R}_{j+1} on obtient

$$\begin{aligned} & H_{\sigma_{j+1}, \sigma_{j+1}}^S \psi_l(x; \nu) \\ &= \\ & \left(\frac{1}{\lambda_j} + \frac{1}{\lambda_{j+1}} \right) (I - {}^t \xi_{j+1} \xi_{j+1})|_{T_{\sigma_{j+1}} \partial \Omega} - 2\delta^\nu(\sigma_{j+1}) \xi_{j+1,3} B(\sigma_{j+1})|_{T_{\sigma_{j+1}} \partial \Omega} \end{aligned}$$

Ceci donne

$$\begin{aligned} & M_{j+1}^\nu \\ &= \\ & \left(\frac{1}{\lambda_j} + \frac{1}{\lambda_{j+1}} \right) (I - {}^t \xi_{j+1} \xi_{j+1})|_{T_{\sigma_{j+1}} \partial \Omega} - 2\delta^\nu(\sigma_{j+1}) \xi_{j+1,3} B(\sigma_{j+1})|_{T_{\sigma_{j+1}} \partial \Omega} \\ & \quad - \frac{1}{\lambda_j^2 \det M_j^\nu} (t_{kq})_{k,q \in \{1,2\}} \end{aligned} \quad (3.9)$$

3. Calcul de $D = P_{j+1}^\nu|_{T_{\sigma_{j+1}} \partial \Omega} + \frac{1}{\lambda_{j+1}} (I - (\xi_{j+1} {}^t \xi_{j+1})|_{T_{\sigma_{j+1}} \partial \Omega}) - M_{j+1}^\nu$

On a, en utilisant les formules (3.8) et (3.9)

$$D = \left((S_{\lambda_j}(P_j^\nu))_{\mathfrak{R}_{j+1}} \right)|_{T_{\sigma_{j+1}} \partial \Omega} + \frac{1}{\lambda_j} (I - ({}^t \xi_{j+1} \xi_{j+1})|_{T_{\sigma_{j+1}} \partial \Omega}) + \frac{1}{\lambda_j^2 \det M_j^\nu} (t_{rs})_{r,s \in \{1,2\}}$$

On multiplie par $\lambda_j^2 \det M_j^\nu \neq 0$, et on note:

$$\lambda_j^2 \det M_j^\nu D_{rs} = D_{rs}^{(a)} + \frac{1}{\lambda_j} D_{rs}^{(b)} + \lambda_j D_{rs}^{(c)}$$

avec $D = (D_{rs})_{r,s \in \{1,2\}}$ et

$$D_{rs}^{(a)} = \xi_{j,3}^2 \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 p_{is}^{(j)} p_{kr}^{(j)} a_{ki}^{(j)} + \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 \left\{ (-1)^{i+k} (\delta_{ik} - \xi_{j,i} \xi_{j,k}) (\delta_{rs} - \xi_{j+1,r} \xi_{j+1,s}) + l_{r,i+1} l_{s,k+1} \right\} a_{ik}^{(j)}$$

$$D_{rs}^{(b)} = \xi_{j,3}^2 (\delta_{rs} - \xi_{j+1,r} \xi_{j+1,s}) + \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{i+k} (\delta_{ik} - \xi_{j,i} \xi_{j,k}) l_{r,i+1} l_{s,k+1}$$

$$D_{rs}^{(c)} = \xi_{j,3}^2 \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 p_{is}^{(j)} p_{kr}^{(j)} b_{ki}^{(j)} + (a_{11}^{(j)} a_{22}^{(j)} - (a_{12}^{(j)})^2) (\delta_{rs} - \xi_{j+1,r} \xi_{j+1,s})$$

où $D_{rs}^{(a)}$, $D_{rs}^{(b)}$ et $D_{rs}^{(c)}$ sont indépendants de λ_j .

On a donc

$$\forall r, s \in \{1, 2\} \quad D_{rs}^{(a)} = D_{rs}^{(b)} = D_{rs}^{(c)} = 0 \implies D = 0$$

On démontre la nullité de $D_{rs}^{(\cdot)}$ en utilisant uniquement les relations $P_j^\nu \xi_j = 0$, $|\xi_j| = 1$ et ${}^t \mathcal{P}^{(j)} \mathcal{P}^{(j)} = I$.

Ce qui achève la démonstration de la formule (3.4) au rang $j + 1$.

Pour établir la formule (3.5) au rang $j + 1$, on utilise les propriétés 2.1 et 2.2 pour obtenir $P_{j+1}^\nu \xi_{j+1} = 0$. On pose ensuite

$$H_{j+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \xi_{j+1,1} \\ 0 & 1 & \xi_{j+1,2} \\ 0 & 0 & \xi_{j+1,3} \end{bmatrix}$$

On a

$$\begin{aligned} \det(I + \lambda_{j+1} P_{j+1}^\nu) &= \frac{1}{(\det H_{j+1})^2} \det \left({}^t H_{j+1} (I + \lambda_{j+1} P_{j+1}^\nu) H_{j+1} \right) \\ &= \frac{1}{\xi_{j+1,3}^2} \det \begin{bmatrix} 1 + \lambda_{j+1} a_{11}^{(j+1)} & \lambda_{j+1} a_{12}^{(j+1)} & \xi_{j+1,1} \\ \lambda_{j+1} a_{12}^{(j+1)} & 1 + \lambda_{j+1} a_{22}^{(j+1)} & \xi_{j+1,2} \\ \xi_{j+1,1} & \xi_{j+1,2} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Comme $|\xi_{j+1}| = 1$, on obtient à l'aide de la formule (3.4) au rang $j + 1$:

$$\det(I + \lambda_{j+1} P_{j+1}^\nu) = \frac{\lambda_{j+1}^2}{(\xi_{j+1,3})^2} \det M_{j+1}^\nu$$

Ceci démontre la formule (3.5) au rang $j + 1$.

Remarque : En fait, on a montré mieux:

$$\forall \lambda > 0 \quad \det(I + \lambda P_{j+1}^\rho) = \frac{\lambda^2}{(\xi_{j+1,3})^2} \det M_{j+1}^\rho$$

où $\rho = (\sigma_1, \dots, \sigma_{j+1}) \in C_{j+1}(\lambda \xi_{j+1})$.

De plus:

- $P_{j+1}^\rho = P_{j+1}^\nu$ et, pour $\lambda = \lambda_{j+1}$, $M_{j+1}^\rho = M_{j+1}^\nu$.
- $\forall \lambda > 0 \quad \det(I + \lambda P_{j+1}^\rho) > 0$ car P_{j+1}^ρ est une matrice positive et donc $\forall \lambda > 0 \quad \det M_{j+1}^\rho > 0$

Ceci donne

$$\forall \lambda > 0 \quad \text{Tr } M_{j+1}^\rho \neq 0$$

Cette quantité étant positive pour λ au voisinage de zéro, on a alors par continuité :

$$\forall \lambda > 0 \quad \text{Tr } M_{j+1}^\rho > 0$$

$$\left(\text{Tr } M_{j+1}^\rho = a_{11}^{(j+1)} + a_{22}^{(j+1)} + \frac{1 + \xi_{j+1,3}^2}{\lambda} \right)$$

Ceci démontre la formule (3.6) au rang $j + 1$.

On a aussi montré que M_{j+1}^ν est inversible.

C.Q.F.D.

3.4 Contribution des chemins stationnaires

Au paragraphe précédent, on a démontré que

$$\forall x \in \Omega \setminus \mathcal{T}, \forall l \in \mathbb{N}^*, \forall \nu \in C_l(x), \forall j \in \{1, \dots, l\} \quad M_j^\nu \text{ inversible}$$

En utilisant des fonctions cut-off valant 1 aux points de phase stationnaire, ceci nous permet d'appliquer les corollaires 6.1 et 6.3 (des théorèmes de phase stationnaire et non stationnaire pour une amplitude continue) à $u_l(x; k\xi)$ pour obtenir

$$\forall x \in \Omega \setminus \mathcal{T}$$

$$\begin{aligned} & u_l(x; k\xi) - u_{l-1}(x; k\xi) \\ &= \\ & \left(\frac{ik}{4\pi}\right)^l \left(\frac{2\pi}{k}\right)^l \sum_{\nu=(\sigma_1, \dots, \sigma_l) \in C_l(x)} \frac{e^{i\frac{\pi}{4} \sum_{j=1}^l \text{sgn } M_j(x; \nu)}}{\left| \prod_{j=1}^l \det M_j(x; \nu) \right|^{1/2}} \mathcal{A}_l(\nu) e^{-ik\psi_l(x; \nu)} + O\left(\frac{1}{k}\right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

On utilise ensuite (3.6), (3.8) et la définition de \mathcal{A}_l pour avoir:

$$\begin{aligned}
& u_l(x; k\xi) - u_{l-1}(x; k\xi) \\
& \quad = \\
& (-1)^l \sum_{\nu=(\sigma_1, \dots, \sigma_l) \in \mathcal{C}_l(x)} \frac{\alpha_0(\sigma_1) e^{-ik\psi_l(x; \nu)}}{\left| \left(\prod_{j=1}^{l-1} \det(I+ | \sigma_{j+1} - \sigma_j | P_j^\nu) \right) \det(I+ | x - \sigma_l | P_l^\nu) \right|^{1/2}} \quad (3.11) \\
& \quad \quad \quad + \\
& \quad \quad \quad O\left(\frac{1}{k}\right)
\end{aligned}$$

3.5 Contribution des chemins non-optiques

Pour effectuer une comparaison avec l'approximation de l'optique géométrique donnée par la formule (3.1), il faut tout d'abord étudier les ensembles $\mathcal{C}_l(x)$ et $\mathcal{R}_l(x)$ définis au chapitre 2.

En effet, l'approximation de l'optique géométrique se calcule par une somme sur $\mathcal{R}_l(x)$ et l'approximation par le théorème de la phase stationnaire de la méthode itérative fait apparaître une somme sur $\mathcal{C}_l(x)$.

De manière évidente, on a $\mathcal{R}_l(x) \subset \mathcal{C}_l(x)$.

On a le

Lemme 3.3 (de transmission) *Soit $x \in \Omega \setminus \mathcal{T}$ et $\nu = (\sigma_1^\nu, \dots, \sigma_l^\nu) \in \mathcal{C}_l(x)$*

1. *S'il existe $j \in \{1, \dots, l-1\}$ tel que*

$$\sigma \in \left\{]\sigma_j^\nu; \sigma_{j+1}^\nu[\cap \partial\Omega \right\} \quad \text{et} \quad (\sigma - \sigma_j^\nu) \cdot n(\sigma) < 0$$

alors

$$\mu = (\sigma_1^\nu, \dots, \sigma_j^\nu, \sigma, \sigma_{j+1}^\nu, \dots, \sigma_l^\nu) \in \mathcal{C}_{l+1}(x)$$

2. *S'il existe $t \in \mathbb{R}_*^+$ tel que*

$$\sigma = \sigma_1^\nu - t\xi \in \partial\Omega \quad \text{et} \quad \xi \cdot n(\sigma) < 0$$

alors

$$\mu = (\sigma, \sigma_1^\nu, \dots, \sigma_l^\nu) \in \mathcal{C}_{l+1}(x)$$

En notant $\mu = (\sigma_1^\mu, \dots, \sigma_{l+1}^\mu)$, on a dans les deux cas

$$(-1)^l \frac{\alpha_0(\sigma_1^\nu) e^{-ik\psi_l(x; \nu)}}{\left| \left(\prod_{q=1}^l \det(I+ | \sigma_{q+1}^\nu - \sigma_q^\nu | P_q^\nu) \right) \right|^{1/2}} + (-1)^{l+1} \frac{\alpha_0(\sigma_1^\mu) e^{-ik\psi_{l+1}(x; \mu)}}{\left| \left(\prod_{q=1}^{l+1} \det(I+ | \sigma_{q+1}^\mu - \sigma_q^\mu | P_q^\mu) \right) \right|^{1/2}} = 0$$

Preuve :

1. Soit $i, i', i'' \in \{1, \dots, N\}$ vérifiant

$$\sigma \in \partial K_i, \sigma_j^\nu \in \partial K_\nu \text{ et } \sigma_{j+1}^\nu \in \partial K_{\nu'}$$

Par hypothèse $\nu \in \mathcal{C}_l(x)$ ce qui entraîne

$$(\sigma_{j+1}^\nu - \sigma_j^\nu).n(\sigma_j^\nu) < 0 \text{ et } i' \neq i''$$

Pour avoir $\mu = (\sigma_1^\nu, \dots, \sigma_j^\nu, \sigma, \sigma_{j+1}^\nu, \dots, \sigma_l^\nu) \in \mathcal{C}_{l+1}(x)$, avec les hypothèses $(\sigma - \sigma_j^\nu).n(\sigma) < 0$ et $\nu \in \mathcal{C}_l(x)$, il faut vérifier que $\mu \in (\partial\Omega)_*^{l+1}$, i.e. $i \neq i'$ et $i \neq i''$ avec $i' \neq i''$.

On propose ici une démonstration par l'absurde.

Supposons $i = i'$, i.e. $\sigma \in \partial K_i$ et $\sigma_j^\nu \in \partial K_i$. La condition $(\sigma - \sigma_j^\nu).n(\sigma) < 0$ entraîne $\sigma \neq \sigma_j^\nu$. Comme $\nu \in \mathcal{C}_l(x)$, on a $(\sigma_j^\nu - \sigma_{j-1}^\nu).n(\sigma_j^\nu) < 0$. La stricte convexité de K_i impose alors à ν de réaliser une condition de transmission en σ_j^ν avec $(\sigma - \sigma_j^\nu).n(\sigma) > 0$. D'où une contradiction.

De façon similaire on démontre que $i \neq i''$.

2. Soit $i, i' \in \{1, \dots, N\}$ vérifiant

$$\sigma \in \partial K_i \text{ et } \sigma_1^\nu \in \partial K_{\nu'}$$

Pour obtenir $\mu = (\sigma, \sigma_1^\nu, \dots, \sigma_l^\nu) \in \mathcal{C}_{l+1}(x)$, avec les hypothèses $\xi.n(\sigma) < 0$ et $\nu \in \mathcal{C}_l(x)$, il suffit de vérifier que $\mu \in (\partial\Omega)_*^{l+1}$, i.e. $i \neq i'$.

L'hypothèse $\nu \in \mathcal{C}_l(x)$ entraîne $\xi.n(\sigma_1^\nu) < 0$ et la condition $\sigma - \sigma_1^\nu = t\xi$ avec $t > 0$ donne $(\sigma - \sigma_1^\nu).n(\sigma) < 0$ et $(\sigma - \sigma_1^\nu).n(\sigma_1^\nu) < 0$. La stricte convexité des compacts $(K_j)_{j \in \{1, \dots, N\}}$ impose alors $i \neq i'$.

Remarque : Dans les deux cas, le $l + 1$ -chemin généralisé μ réalise une condition de transmission en σ et donc

$$\psi_l(x; \nu) = \psi_{l+1}(x; \mu)$$

On établit maintenant la formule 3.6, dans les deux cas. En fait, il suffit de prouver que

$$\left| \left(\prod_{i=1}^l \det(I + | \sigma_{i+1}^\nu - \sigma_i^\nu | P_i^\nu) \right) \right|^{1/2} = \left| \left(\prod_{i=1}^{l+1} \det(I + | \sigma_{i+1}^\mu - \sigma_i^\mu | P_i^\mu) \right) \right|^{1/2}$$

Ici $\sigma_l^\nu = \sigma_{l+1}^\mu = x$.

La preuve est immédiate pour le deuxième cas.

On se place sous les hypothèses du premier cas et on a

$$\forall i \in \{1, \dots, j\} \quad P_i^\nu = P_i^\mu$$

et, μ réalisant une condition de transmission en σ

$$P_{j+1}^\mu = S_{|\sigma_j^\nu - \sigma|}(P_j^\nu) = P_j^\nu (I + |\sigma_j^\nu - \sigma| P_j^\nu)^{-1}$$

Ce qui donne

$$(I + |\sigma_{j+1}^\nu - \sigma| P_{j+1}^\mu)(I + |\sigma_j^\nu - \sigma| P_j^\mu) = I + |\sigma_{j+1}^\nu - \sigma_j^\nu| P_j^\nu$$

En prenant le déterminant de la formule ci-dessus on obtient

$$\det(I + |\sigma_{j+1}^\nu - \sigma| P_{j+1}^\mu) \det(I + |\sigma_j^\nu - \sigma| P_j^\mu) = \det(I + |\sigma_{j+1}^\nu - \sigma_j^\nu| P_j^\nu)$$

De plus

$$S_{|\sigma_{j+2}^\nu - \sigma_{j+1}^\mu|}(P_{j+1}^\mu) = S_{|\sigma_{j+1}^\nu - \sigma|}(S_{|\sigma_j^\nu - \sigma|}(P_j^\nu))$$

Comme μ réalise une condition de transmission en σ on a

$$|\sigma_{j+1}^\nu - \sigma| + |\sigma_{j+1}^\nu - \sigma| = |\sigma_{j+2}^\nu - \sigma_{j+1}^\mu|$$

Ceci donne

$$S_{|\sigma_{j+2}^\nu - \sigma_{j+1}^\mu|}(P_{j+1}^\mu) = S_{|\sigma_{j+1}^\nu - \sigma_j^\nu|}(P_j^\nu)$$

On obtient alors

$$\forall i \in \{j+1, \dots, l\} \quad P_i^\nu = P_{i+1}^\mu$$

En regroupant les résultats on a

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^l \det(I + |\sigma_{i+1}^\nu - \sigma_i^\nu| P_i^\nu) &= \prod_{i=1}^j \det(I + |\sigma_{i+1}^\mu - \sigma_i^\mu| P_i^\mu) \det(I + |\sigma_{j+1}^\mu - \sigma_j^\mu| P_j^\mu) \\ &\quad \times \prod_{i=j+1}^l \det(I + |\sigma_{i+1}^\mu - \sigma_i^\mu| P_i^\mu) \\ &= \prod_{i=1}^{l+1} \det(I + |\sigma_{i+1}^\mu - \sigma_i^\mu| P_i^\mu) \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

On vient donc de montrer que les contributions des points de $\mathcal{C}(x) \setminus \mathcal{R}(x)$ s'annule deux à deux.

3.6 Comparaison avec l'approximation de l'optique géométrique

On effectue ici la comparaison entre l'approximation haute fréquence de la méthode itérative donnée par le théorème de la phase stationnaire (formule 3.10) et l'approximation de l'optique géométrique donnée au chapitre 7.

Soit $x \in \Omega \setminus \mathcal{T}$. On suppose que $\mathcal{C}_l(x) = \emptyset$ pour $l > n$. On déduit du Lemme 3.2 que les seuls éléments de $\mathcal{C}(x)$ ayant une contribution sont :

- le 1-chemin généralisé $\nu = (\sigma_1)$ passant par x réalisant une condition de transmission en σ_1 et vérifiant

$$\forall t > 0 \quad \sigma_1 - t\xi \in \Omega$$

- les j -rayons $\nu = (\sigma_1, \dots, \sigma_l)$ passant par x ($j \leq n$).

On a donc prouvé le théorème 1.1.

C.Q.F.D.

Chapitre 4

Preuve du théorème 1.2 (équations de Maxwell)

Comme dans le cas de l'équation d'Helmholtz, la méthode proposée au chapitre 1 pour les équations de Maxwell pallie l'inadéquation de la méthode de Kirchhoff au cas d'obstacle non convexes. On démontre ici que cette méthode coïncide au premier ordre avec l'approximation de l'optique géométrique lorsque $k \rightarrow \infty$.

Tout d'abord on explicite l'approximation de l'optique géométrique pour les équations de Maxwell détaillée au chapitre 7 et donnée par

$$\mathbf{E}_{O.G.}(x; k) = \mathbf{e}_0^I(x) e^{-ik\xi \cdot x} + \sum_{l \in \mathbb{N}^*} (-1)^l \sum_{\rho = (\sigma_1, \dots, \sigma_l) \in \mathcal{R}_l(x)} \frac{\mathcal{G}_{(\mathbf{n}(\sigma_1), \dots, \mathbf{n}(\sigma_l))}(\mathbf{e}_0^R(\sigma_1)) e^{-ik\psi_l(x, \rho)}}{\prod_{j=1}^l \sqrt{\det(I + |\sigma_j - \sigma_{j+1}| M_j^\rho)}} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{H}_{O.G.}(x; k) = \mathbf{h}_0^I(x) e^{-ik\xi \cdot x} + \sum_{l \in \mathbb{N}^*} (-1)^l \sum_{\rho = (\sigma_1, \dots, \sigma_l) \in \mathcal{R}_l(x)} \frac{\mathcal{G}_{(\mathbf{n}(\sigma_1), \dots, \mathbf{n}(\sigma_l))}(\mathbf{h}_0^R(\sigma_1)) e^{-ik\psi_l(x, \rho)}}{\prod_{j=1}^l \sqrt{\det(I + |\sigma_j - \sigma_{j+1}| M_j^\rho)}} \quad (4.2)$$

Ici $\sigma_{l+1} = x$.

4.1 Nouvelle formulation

On note $\mathbf{P}_l, \mathbf{Q}_l$ les fonctions définies sur $R^3 \times (\partial\Omega)_*^l$ par

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_l(x; \sigma_1, \dots, \sigma_l) &= \\ &= \frac{\theta(\sigma_1) \prod_{j=1}^{l-1} \theta(\sigma_{j+1}, \sigma_j)}{\prod_{j=1}^l |\sigma_{j+1} - \sigma_j|} \left(\circ_{j=1}^l \mathcal{E} \left(\frac{\sigma_{j+1} - \sigma_j}{|\sigma_{j+1} - \sigma_j|}, \mathbf{n}(\sigma_j) \right) \right) (\mathbf{h}_0^l(\sigma_1)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_l(x; \sigma_1, \dots, \sigma_l) &= \\ &= \frac{\theta(\sigma_1) \prod_{j=1}^{l-1} \theta(\sigma_{j+1}, \sigma_j)}{\prod_{j=1}^l |\sigma_{j+1} - \sigma_j|} \left(\circ_{j=1}^l \mathcal{H} \left(\frac{\sigma_{j+1} - \sigma_j}{|\sigma_{j+1} - \sigma_j|}, \mathbf{n}(\sigma_j) \right) \right) (\mathbf{h}_0^l(\sigma_1)) \end{aligned}$$

Ici $\sigma_{l+1} = x$.

Avec ces notations, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_l(x; k\xi) &= \mathbf{E}_{l-1}(x; k\xi) \\ &+ \left(\frac{ik}{4\pi} \right)^l \int_{(\partial\Omega)_*^l} \mathbf{P}_l(x; \sigma_1, \dots, \sigma_l) e^{-ik\psi_l(x; \sigma_1, \dots, \sigma_l)} d\sigma_1 \dots d\sigma_l \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_l(x; k\xi) &= \mathbf{H}_{l-1}(x; k\xi) \\ &+ \left(\frac{ik}{4\pi} \right)^l \int_{(\partial\Omega)_*^l} \mathbf{Q}_l(x; \sigma_1, \dots, \sigma_l) e^{-ik\psi_l(x; \sigma_1, \dots, \sigma_l)} d\sigma_1 \dots d\sigma_l \end{aligned}$$

Remarque 4.1 Si

$$\xi \cdot \mathbf{n}(\sigma_1) \geq 0$$

ou s'il existe $j \in \{1, \dots, l-1\}$ tel que

$$\frac{\sigma_{j+1} - \sigma_j}{|\sigma_{j+1} - \sigma_j|} \cdot \mathbf{n}(\sigma_{j+1}) \geq 0$$

alors

$$\mathbf{P}_l(x; \sigma_1, \dots, \sigma_l) = \mathbf{Q}_l(x; \sigma_1, \dots, \sigma_l) = 0$$

4.2 Contribution des chemins de phase stationnaire

La phase ψ_l des intégrales sur $(\partial\Omega)_*^l$ est identique à celle obtenue pour l'équation d'Helmholtz: l'ensemble des points de $(\partial\Omega)_*^l$ où la phase ψ_l stationne est donné au lemme 3.1.

Remarque 4.2 Pour $x \in \Omega \setminus \mathcal{T}$, les points de $(\partial\Omega)_*^l$ où la phase $\psi_l(x, \bullet)$ stationne et où les fonctions $\mathbf{P}_l(x; \bullet)$ et $\mathbf{Q}_l(x; \bullet)$ sont non nulles correspondent aux l -chemins généralisés passant par x .

Ensuite le corollaire 6.3 ainsi que l'utilisation de fonctions cut-off valant 1 aux points de phase stationnaire permettent l'emploi du corollaire 6.1 (itérée du théorème de la phase stationnaire) et le théorème de la phase non stationnaire pour obtenir :

$\forall x \in \Omega \setminus \mathcal{T}$

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_l(x; k\xi) - \mathbf{E}_{l-1}(x; k\xi) \\ &= \\ & \left(\frac{1}{2}\right)^l \sum_{\nu=(\sigma_1, \dots, \sigma_l) \in \mathcal{C}_l(x)} \frac{e^{i\frac{\pi}{4} \sum_{j=1}^l \text{sgn } M_j^\nu} \mathbf{P}_l(x; \nu) e^{-ik\psi_l(x; \nu)}}{\prod_{j=1}^l |\det M_j^\nu|^{1/2}} + O\left(\frac{1}{k}\right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \mathbf{H}_l(x; k\xi) - \mathbf{H}_{l-1}(x; k\xi) \\ &= \\ & \left(\frac{1}{2}\right)^l \sum_{\nu=(\sigma_1, \dots, \sigma_l) \in \mathcal{C}_l(x)} \frac{e^{i\frac{\pi}{4} \sum_{j=1}^l \text{sgn } M_j^\nu} \mathbf{Q}_l(x; \nu) e^{-ik\psi_l(x; \nu)}}{\prod_{j=1}^l |\det M_j^\nu|^{1/2}} + O\left(\frac{1}{k}\right) \end{aligned}$$

On utilise les relations obtenues au lemme 3.2, pour obtenir

$\forall x \in \Omega \setminus \mathcal{T}$

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_l(x; k\xi) - \mathbf{E}_{l-1}(x; k\xi) \\ &= \\ & (-1)^l \sum_{\nu=(\sigma_1, \dots, \sigma_l) \in \mathcal{C}_l(x)} \frac{\mathcal{E}^\nu(\mathbf{h}_0^i(\sigma_1)) e^{-ik\psi_l(x; \nu)}}{\prod_{j=1}^l \left| \frac{\sigma_{j+1} - \sigma_j}{|\sigma_{j+1} - \sigma_j|} \cdot n(\sigma_j) \right| \left(\det(I + | \sigma_{j+1} - \sigma_j | P_j^\nu) \right)^{1/2}} + O\left(\frac{1}{k}\right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

et

$$\begin{aligned} & \mathbf{H}_l(x; k\xi) - \mathbf{H}_{l-1}(x; k\xi) \\ &= \\ & (-1)^l \sum_{\nu=(\sigma_1, \dots, \sigma_l) \in \mathcal{C}_l(x)} \frac{\mathcal{H}^\nu(\mathbf{h}_0^i(\sigma_1)) e^{-ik\psi_l(x; \nu)}}{\prod_{j=1}^l \left| \frac{\sigma_{j+1} - \sigma_j}{|\sigma_{j+1} - \sigma_j|} \cdot n(\sigma_j) \right| \left(\det(I + | \sigma_{j+1} - \sigma_j | P_j^\nu) \right)^{1/2}} + O\left(\frac{1}{k}\right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

4.3 Contribution des chemins non-optiques

Pour établir une relation entre les formules précédentes et celles données par l'approximation de l'optique géométrique, il faut, comme dans le cas de l'équation d'Helmholtz, établir le

Lemme 4.1 Soient $x \in \Omega \setminus \mathcal{T}$ et $\nu = (\sigma_1^\nu, \dots, \sigma_l^\nu) \in \mathcal{C}_l(x)$

1. S'il existe $j \in \{1, \dots, l-1\}$ tel que

$$\sigma \subset \{|\sigma_j^\nu; \sigma_{j+1}^\nu| \cap \partial\Omega\} \quad \text{et} \quad (\sigma - \sigma_j^\nu) \cdot n(\sigma) < 0$$

alors

$$\mu = (\sigma_1^\nu, \dots, \sigma_j^\nu, \sigma, \sigma_{j+1}^\nu, \dots, \sigma_l^\nu) \in \mathcal{C}_{l+1}(x)$$

2. S'il existe $t \in R_*^+$ tel que

$$\sigma = \sigma_1^\nu - t\xi \in \partial\Omega \quad \text{et} \quad \xi \cdot n(\sigma) < 0$$

alors

$$\mu = (\sigma, \sigma_1^\nu, \dots, \sigma_l^\nu) \in \mathcal{C}_{l+1}(x)$$

En notant $\mu = (\sigma_1^\mu, \dots, \sigma_{l+1}^\mu)$, on a dans les deux cas

$$\begin{aligned} & (-1)^l \frac{\mathcal{E}^\nu(\mathbf{h}_0^i(\sigma_1^\nu)) e^{-ik\psi_l(x;\nu)}}{\prod_{q=1}^l \left| \frac{\sigma_{q+1}^\nu - \sigma_q^\nu}{|\sigma_{q+1}^\nu - \sigma_q^\nu|} \cdot n(\sigma_q^\nu) \right| |\det(I + |\sigma_{q+1}^\nu - \sigma_q^\nu| P_q^\nu)|^{1/2}} \\ & + (-1)^{l+1} \frac{\mathcal{E}^\mu(\mathbf{h}_0^i(\sigma_1^\mu)) e^{-ik\psi_{l+1}(x;\mu)}}{\prod_{q=1}^{l+1} \left| \frac{\sigma_{q+1}^\mu - \sigma_q^\mu}{|\sigma_{q+1}^\mu - \sigma_q^\mu|} \cdot n(\sigma_q^\mu) \right| |\det(I + |\sigma_{q+1}^\mu - \sigma_q^\mu| P_q^\mu)|^{1/2}} = 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

et

$$\begin{aligned} & (-1)^l \frac{\mathcal{H}^\nu(\mathbf{h}_0^i(\sigma_1^\nu)) e^{-ik\psi_l(x;\nu)}}{\prod_{q=1}^l \left| \frac{\sigma_{q+1}^\nu - \sigma_q^\nu}{|\sigma_{q+1}^\nu - \sigma_q^\nu|} \cdot n(\sigma_q^\nu) \right| |\det(I + |\sigma_{q+1}^\nu - \sigma_q^\nu| P_q^\nu)|^{1/2}} \\ & + (-1)^{l+1} \frac{\mathcal{H}^\mu(\mathbf{h}_0^i(\sigma_1^\mu)) e^{-ik\psi_{l+1}(x;\mu)}}{\prod_{q=1}^{l+1} \left| \frac{\sigma_{q+1}^\mu - \sigma_q^\mu}{|\sigma_{q+1}^\mu - \sigma_q^\mu|} \cdot n(\sigma_q^\mu) \right| |\det(I + |\sigma_{q+1}^\mu - \sigma_q^\mu| P_q^\mu)|^{1/2}} = 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Preuve :

On reprend, ici, la preuve du Lemme 3.2 qui démontre les points 1 et 2, et donne les formules

$$\psi_l(x; \nu) = \psi_{l+1}(x; \mu)$$

et

$$\left| \left(\prod_{i=1}^l \det(I + |\sigma_{i+1}^\nu - \sigma_i^\nu| P_i^\nu) \right) \right|^{1/2} = \left| \left(\prod_{i=1}^{l+1} \det(I + |\sigma_{i+1}^\mu - \sigma_i^\mu| P_i^\mu) \right) \right|^{1/2}$$

Ici $\sigma_l^\nu = \sigma_{l+1}^\mu = x$.

Pour établir les formules (4.5) et (4.6), il suffit de prouver que

$$\frac{\mathcal{E}^\nu(\mathbf{h}_0^i(\sigma_1^\nu))}{\prod_{q=1}^l \left| \frac{\sigma_{q+1}^\nu - \sigma_q^\nu}{|\sigma_{q+1}^\nu - \sigma_q^\nu|} \cdot n(\sigma_q^\nu) \right|} = \frac{\mathcal{E}^\mu(\mathbf{h}_0^i(\sigma_1^\mu))}{\prod_{q=1}^{l+1} \left| \frac{\sigma_{q+1}^\mu - \sigma_q^\mu}{|\sigma_{q+1}^\mu - \sigma_q^\mu|} \cdot n(\sigma_q^\mu) \right|} \quad (4.7)$$

et

$$\frac{\mathcal{H}^\nu(\mathbf{h}_0^i(\sigma_1^\nu))}{\prod_{q=1}^l \left| \frac{\sigma_{q+1}^\nu - \sigma_q^\nu}{|\sigma_{q+1}^\nu - \sigma_q^\nu|} \cdot n(\sigma_q^\nu) \right|} = \frac{\mathcal{H}^\mu(\mathbf{h}_0^i(\sigma_1^\mu))}{\prod_{q=1}^{l+1} \left| \frac{\sigma_{q+1}^\mu - \sigma_q^\mu}{|\sigma_{q+1}^\mu - \sigma_q^\mu|} \cdot n(\sigma_q^\mu) \right|} \quad (4.8)$$

Par hypothèse, les champs électromagnétiques \mathbf{E}_I et \mathbf{H}_I vérifient les équations de Maxwell dans \mathbb{R}^3 suivante

$$\begin{cases} -ik \mathbf{E}_I + \text{rot } \mathbf{H}_I & = 0 \\ \text{div } \mathbf{E}_I & = 0 \\ ik \mathbf{H}_I + \text{rot } \mathbf{E}_I & = 0 \\ \text{div } \mathbf{H}_I & = 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

où $\{\mathbf{E}_I, \mathbf{H}_I\}(x; k\xi) = \{\mathbf{e}^I(x; k\xi)e^{-ik\xi \cdot x}, \mathbf{h}^I(x; k\xi)e^{-ik\xi \cdot x}\}$, $\mathbf{e}^I(x; k\xi) = \sum_{j=0}^{l-1} \frac{\mathbf{e}_j^I(x)}{k^j} + O\left(\frac{1}{k^l}\right)$ et $\mathbf{h}^I(x; k\xi) = \sum_{j=0}^{l-1} \frac{\mathbf{h}_j^I(x)}{k^j} + O\left(\frac{1}{k^l}\right)$.

En remplaçant les champs électromagnétiques \mathbf{E}_I et \mathbf{H}_I par leur développement asymptotique en $1/k$ dans les équations (4.9) on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 \quad \mathbf{h}_0^I(x) = \xi \wedge \mathbf{e}_0^I(x) \quad \text{et} \quad \mathbf{e}_0^I(x) = -\xi \wedge \mathbf{h}_0^I(x) \quad (4.10)$$

De plus, si les champs $\{\mathbf{E}_I, \mathbf{H}_I\}$ sont solution de (4.9) alors ils sont aussi solution de

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{E}_I + k^2 \mathbf{E}_I & = 0 \\ \Delta \mathbf{H}_I + k^2 \mathbf{H}_I & = 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

En remplaçant les champs \mathbf{E}_I et \mathbf{H}_I par leur développement asymptotique en $1/k$ dans les équations (4.11) on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 \quad \mathbf{e}_0^I(x) \cdot \xi = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{h}_0^I(x) \cdot \xi = 0 \quad (4.12)$$

Notations : Soient $x \in \Omega \setminus \mathcal{T}$ et $\rho = (\sigma_1, \dots, \sigma_l) \in \mathcal{C}_l(x)$. Pour tout $j \in \{1, \dots, l\}$ on note \mathcal{K}_j^ρ l'application de \mathbb{R}^3 suivante

$\forall v \in \mathbb{R}^3$

$$\mathcal{K}_j^\rho(v) = \begin{cases} v & \text{si } \rho \text{ réalise une condition de transmission en } \sigma_j \\ \mathcal{F}_{n(\sigma_j)}(v) & \text{si } \rho \text{ réalise une condition de réflexion en } \sigma_j \end{cases}$$

On note $\mathcal{K}^\rho = \circ_{j=1}^l \mathcal{K}_j^\rho$

Les formules (4.10) et (4.12) permettent l'emploi de la propriété 2.4 pour obtenir

$$\mathcal{E}^\nu(\mathbf{h}_0^i(\sigma_1^\nu)) = \prod_{q=1}^l \left| \frac{\sigma_{q+1}^\nu - \sigma_q^\nu}{|\sigma_{q+1}^\nu - \sigma_q^\nu|} \cdot n(\sigma_q^\nu) \right| \mathcal{K}^\nu(\mathbf{e}_0^i(\sigma_1^\nu))$$

et

$$\mathcal{H}^\nu(\mathbf{h}_0^i(\sigma_1^\nu)) = \prod_{q=1}^{l+1} \left| \frac{\sigma_{q+1}^\nu - \sigma_q^\nu}{\sigma_{q+1}^\nu - \sigma_q^\nu} \cdot n(\sigma_q^\nu) \right| \mathcal{K}^\nu(\mathbf{e}_0^i(\sigma_1^\nu))$$

ainsi que

$$\mathcal{E}^\mu(\mathbf{h}_0^i(\sigma_1^\mu)) = \prod_{q=1}^{l+1} \left| \frac{\sigma_{q+1}^\mu - \sigma_q^\mu}{\sigma_{q+1}^\mu - \sigma_q^\mu} \cdot n(\sigma_q^\mu) \right| \mathcal{K}^\mu(\mathbf{e}_0^i(\sigma_1^\mu))$$

et

$$\mathcal{H}^\mu(\mathbf{h}_0^i(\sigma_1^\mu)) = \prod_{q=1}^{l+1} \left| \frac{\sigma_{q+1}^\mu - \sigma_q^\mu}{\sigma_{q+1}^\mu - \sigma_q^\mu} \cdot n(\sigma_q^\mu) \right| \mathcal{K}^\mu(\mathbf{e}_0^i(\sigma_1^\mu))$$

Pour conclure il suffit de montrer que

$$\mathcal{K}^\nu(\mathbf{e}_0^i(\sigma_1^\nu)) = \mathcal{K}^\mu(\mathbf{e}_0^i(\sigma_1^\mu))$$

et

$$\mathcal{K}^\nu(\mathbf{h}_0^i(\sigma_1^\nu)) = \mathcal{K}^\mu(\mathbf{h}_0^i(\sigma_1^\mu))$$

Or ceci découle directement du fait que μ réalise une condition de transmission en σ .

C.Q.F.D.

4.4 Comparaison avec l'approximation de l'optique géométrique

On effectue ici la comparaison entre l'équivalent haute fréquence de la méthode itérative donné par le théorème de la phase stationnaire (formules (4.3) et (4.4)) et l'approximation de l'optique géométrique donnée au chapitre 7.

Soit $x \in \Omega \setminus \mathcal{T}$. On suppose que $\mathcal{C}_l(x) = \emptyset$ pour $l > n$. On déduit du Lemme 4.1 que les seuls éléments de $\mathcal{C}_l(x)$ ayant une contribution sont :

- le 1-chemin généralisé $\nu = (\sigma_1)$ passant par x réalisant une condition de transmission en σ_1 et vérifiant

$$\forall t > 0 \quad \sigma_1 - t\xi \in \Omega$$

- les j -rayons $\nu = (\sigma_1, \dots, \sigma_j)$ passant par x ($j \leq n$).

On a donc prouvé le théorème 1.2.

C.Q.F.D.

Chapitre 5

Résultats numériques

Le calcul numérique des intégrales contenues dans

$$u_l(x; k\xi) = u_{l-1}(x; k\xi) + \left(\frac{ik}{4\pi}\right)^l \int_{(\partial\Omega)_*^l} \mathcal{A}_l(\sigma_1, \dots, \sigma_l) \frac{e^{-ik\psi_l(x; \sigma_1, \dots, \sigma_l)}}{|x - \sigma_l|} d\sigma_1 \cdots d\sigma_l$$

n'est pas réalisable à hautes fréquences (i.e. pour un nombre d'ondes k grand par rapport aux rayons de courbures de $\partial\Omega'$) du fait de la très forte oscillation de $e^{-ik\psi_l(x; \sigma_1, \dots, \sigma_l)}$.

On propose ici des algorithmes basés sur la réduction des domaines d'intégration par utilisation des théorèmes de la phase stationnaire et non stationnaire.

5.1 Description des algorithmes

On peut, tout d'abord, réduire le domaine d'intégration $(\partial\Omega)_*^l$ en utilisant la remarque 3.1 qui donne l'ensemble des points $(\sigma_1, \dots, \sigma_l)$ de $(\partial\Omega)_*^l$ pour lesquels $\mathcal{A}_l(\sigma_1, \dots, \sigma_l) = 0$. On note Γ_l l'ensemble donné par

$$\Gamma_l = \left\{ (\sigma_1, \dots, \sigma_l) \in (\partial\Omega)_*^l \quad \begin{array}{l} \text{tel que } \xi \cdot n(\sigma_1) < 0 \\ \text{et } \forall j \in \{1, \dots, l-1\} \quad (\sigma_{j+1} - \sigma_j) \cdot n(\sigma_{j+1}) < 0 \end{array} \right\}$$

On a

$$\forall (\sigma_1, \dots, \sigma_l) \in (\partial\Omega)_*^l \setminus \Gamma_l \quad \mathcal{A}_l(\sigma_1, \dots, \sigma_l) = 0$$

et

$$\forall (\sigma_1, \dots, \sigma_l) \in \Gamma_l \quad \mathcal{A}_l(\sigma_1, \dots, \sigma_l) \neq 0$$

Ce qui donne

$$u_l(x; k\xi) = u_{l-1}(x; k\xi) + \left(\frac{ik}{4\pi}\right)^l \int_{\Gamma_l} \mathcal{A}_l(\sigma_1, \dots, \sigma_l) \frac{e^{-ik\psi_l(x; \sigma_1, \dots, \sigma_l)}}{|x - \sigma_l|} d\sigma_1 \cdots d\sigma_l$$

Cependant cet ensemble réduit environ de moitié le domaine d'intégration : cela reste insuffisant à hautes fréquences. On utilise alors le corollaire 6.3 (corollaire du théorème de la phase non stationnaire) pour le réduire de nouveau. En effet, celui-ci affirme qu'en dehors d'un voisinage des points de Γ_l où la phase $\psi_l(x, \bullet)$ stationne la contribution de l'intégrale est en $O(1/k^{l+1})$.

5.1.1 Algorithme 1

Cet algorithme correspond à l'emploi du corollaire 6.1 (itération du théorème de la phase stationnaire) sur Γ_l .

$$u_l(x; k\xi) = u_{l-1}(x; k\xi) + \left(\frac{ik}{4\pi}\right)^l \left(\frac{2\pi}{k}\right)^l \sum_{\rho=(\sigma_1, \dots, \sigma_l) \in \mathcal{C}_l(x)} \frac{\mathcal{A}_l(\rho) e^{-i\frac{\pi}{4} \sum_{j=1}^l \text{sgn} M_j^\rho} e^{-ik\psi_l(x; \rho)}}{\prod_{j=1}^l |\det M_j^\rho|^{1/2} |x - \sigma_l|} + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad (5.1)$$

Soit $x \in \Omega \setminus \mathcal{T}$ et $\rho = (\sigma_1, \dots, \sigma_l) \in \mathcal{C}_l(x)$. On note

$$u_l^\rho(x; k\xi) = \left(\frac{ik}{4\pi}\right)^l \left(\frac{2\pi}{k}\right)^l \frac{\mathcal{A}_l(\rho) e^{-i\frac{\pi}{4} \sum_{j=1}^l \text{sgn} M_j^\rho} e^{-ik\psi_l(x; \rho)}}{\prod_{j=1}^l |\det M_j^\rho|^{1/2} |x - \sigma_l|}$$

et

$$\tilde{u}_l(x; k\xi) = \sum_{j=1}^l \sum_{\rho=(\sigma_1, \dots, \sigma_j) \in \mathcal{C}_j(x)} u_j^\rho(x; k\xi)$$

On a alors

$$u_l(x; k\xi) = \tilde{u}_l(x; k\xi) + O(1/k)$$

Tout comme l'approximation de l'optique géométrique cette méthode est instable numériquement. Toutefois en prenant pour Ω' une réunion de compacts à frontière analytique, les calculs peuvent être faits sans mailler la surface. Ceci permettra au paragraphe 5.2 de vérifier les Lemmes 3.2 et 3.3.

5.1.2 Algorithme 2

L'algorithme décrit ici correspond à une méthode d'intégration au dernier rebond: on applique le corollaire 6.1 (itération du théorème de la phase stationnaire) sur les $l-1$ premières

surfaces (i.e. les variables $\sigma_1, \dots, \sigma_{l-1}$) et on intègre sur la dernière surface (i.e. la variable σ_l). On obtient, à l'aide d'une fonction cut-off f valant 1 en σ_l^ρ et nulle hors d'un voisinage de σ_l^ρ

$$\begin{aligned} u_l(x; k\xi) &= u_{l-1}(x; k\xi) + \left(\frac{ik}{4\pi}\right)^l \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{l-1} \sum_{\rho=(\sigma_1^\rho, \dots, \sigma_l^\rho) \in \mathcal{C}_l(x)} \\ &\int_{\mathcal{V}(\sigma_l^\rho)} f(\sigma_l) \frac{\mathcal{A}_l(\nu(\sigma_l), \sigma_l) e^{-i\frac{\pi}{4} \sum_{j=1}^{l-1} \text{sgn } M_j^{\nu(\sigma_l)}} e^{-ik\psi_l(x; \nu(\sigma_l), \sigma_l)}}{\prod_{j=1}^{l-1} |\det M_j^{\nu(\sigma_l)}|^{1/2} |x - \sigma_l|} d\sigma_l \\ &+ O\left(\frac{1}{k}\right) \end{aligned}$$

où $\nu(\sigma_l)$ est un $l-1$ chemin généralisé passant par σ_l et $\mathcal{V}(\sigma_l^\rho)$ est un voisinage sur $\partial\Omega$ de σ_l^ρ . On a, en utilisant les formules du Lemme 3.2

$$\begin{aligned} u_l(x; k\xi) &= u_{l-1}(x; k\xi) + (-1)^{l-1} \left(\frac{ik}{2\pi}\right) \sum_{\rho=(\sigma_1^\rho, \dots, \sigma_l^\rho) \in \mathcal{C}_l(x)} \\ &\int_{\mathcal{V}(\sigma_l^\rho)} \frac{f(\sigma_l) \left| \frac{\sigma_{1-1}^{\nu(\sigma_l)} - \sigma_l}{|\sigma_{1-1}^{\nu(\sigma_l)} - \sigma_l|} \cdot n(\sigma_l) \right| \alpha_0(\sigma_1^{\nu(\sigma_l)}) e^{-ik\psi_l(x; \nu(\sigma_l), \sigma_l)}}{|\sigma_{1-1}^{\nu(\sigma_l)} - \sigma_l| \prod_{j=1}^{l-1} \left| \det \left(I + \begin{array}{c} \sigma_{j+1}^{\nu(\sigma_l)} - \sigma_1^{\nu(\sigma_l)} \\ P_j^{\nu(\sigma_l)} \end{array} \right) \right|^{1/2} |x - \sigma_l|} d\sigma_l \\ &+ O\left(\frac{1}{k}\right) \end{aligned}$$

Ici $\sigma_{l+1}^{\nu(\sigma_l)} = \sigma_l$.

Soit $x \in \Omega \setminus \mathcal{T}$ et $\rho = (\sigma_1^\rho, \dots, \sigma_l^\rho) \in \mathcal{C}_l(x)$. On note

$$\begin{aligned} \overline{u_l^\rho}(x; k\xi) &= \\ &(-1)^{l-1} \left(\frac{ik}{2\pi}\right) \int_{\mathcal{V}(\sigma_l^\rho)} \frac{f(\sigma_l) \left| \frac{\sigma_{1-1}^{\nu(\sigma_l)} - \sigma_l}{|\sigma_{1-1}^{\nu(\sigma_l)} - \sigma_l|} \cdot n(\sigma_l) \right| \alpha_0(\sigma_1^{\nu(\sigma_l)}) e^{-ik\psi_l(x; \nu(\sigma_l), \sigma_l)}}{|\sigma_{1-1}^{\nu(\sigma_l)} - \sigma_l| \prod_{j=1}^{l-1} \left| \det \left(I + \begin{array}{c} \sigma_{j+1}^{\nu(\sigma_l)} - \sigma_1^{\nu(\sigma_l)} \\ P_j^{\nu(\sigma_l)} \end{array} \right) \right|^{1/2} |x - \sigma_l|} d\sigma_l \end{aligned}$$

On a alors

$$u_l(x; k\xi) = \sum_l \sum_{\rho \in \mathcal{C}_j(x)} \overline{u_l^\rho}(x; k\xi) + O(1/k)$$

Il faut donc déterminer numériquement les voisinages $\mathcal{V}(\sigma_l^\rho)$, la fonction cut-off f , et calculer l'amplitude et la phase de l'intégrale pour tout σ_l appartenant à ces voisinages à l'aide des formules de propagation et de réflexion de l'approximation de l'optique géométrique.

5.2 Algorithmme 1

Le but, ici, est de vérifier les formules du Lemme 3.2 (relation entre P_j^ν et M_j^ν) ainsi que le Lemme 3.3 sur la contribution des chemins non-optiques.

On prend comme cas modèle Ω' réunion de deux sphères de rayon un. La première, notée S_1 , est centrée en $(1.1, 0, 0)$. Le centre de la seconde, notée S_2 , est située en $(-1.1, 0, 0)$. On choisit pour nombre d'onde $k = 3000$ et pour direction de propagation de l'onde incidente $\xi = (0, 0, 1)$. On représente (figure 5.1) pour $X = 10e^{i\varphi}$ (où xOz est assimilé au plan complexe) la quantité $|\tilde{u}_2(X; k\xi)| e^{i\varphi}$ qui prend en compte les réflexions et les transmissions simples et doubles

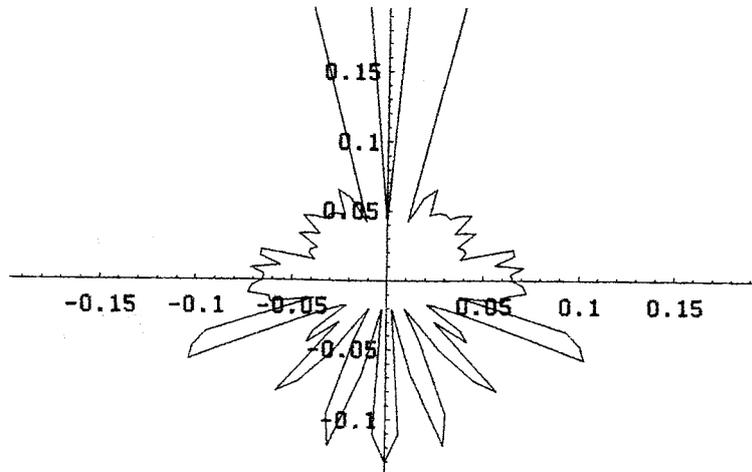


Figure 5.1: Représentation de $|\tilde{u}_2(X; k\xi)| e^{i\varphi}$

On interprète difficilement cette figure, c'est pourquoi, par la suite, on calcule et on représente séparément les contributions provenant des différents chemins.

Les objets choisis étant analytiques, on peut comparer ces résultats avec ceux donnés par l'approximation de l'optique géométrique où l'on note

pour $x \in \Omega \setminus \mathcal{T}$ et $\rho = (\sigma_1, \dots, \sigma_l) \in \mathcal{R}_l(x)$:

$$v_l^\rho(x; k\xi) = (-1)^l \frac{e^{-ik\psi_l(x; \rho)}}{\prod_{j=1}^l \left| \det \left(I + |\sigma_{j+1} - \sigma_1| P_j^\rho \right) \right|^{1/2}}$$

$$\text{(i.e. } v_{O.G.}(x; k\xi) = e^{-ik\xi \cdot x} + \sum_l \sum_{\rho \in \mathcal{R}_l(x)} v_l^\rho(x; k\xi)$$

5.2.1 Calcul des contribution de l'intégrale sur Γ_1

On compare les résultats obtenus (figure 5.2) avec ceux donnés par l'approximation de l'optique géométrique en simple réflexion (figure 5.3). La notation pour notre approximation

est \tilde{u}^ρ qui désigne la contribution du chemin ρ . La notation pour l'approximation de l'optique géométrique est v^ν qui désigne la contribution du rayon ν .

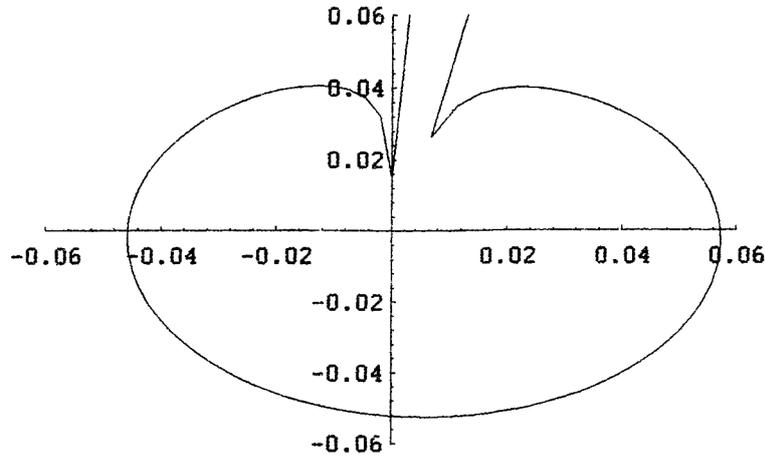


Figure 5.2: $|\tilde{u}_1^\rho(X; k\xi)| e^{\nu\rho}$ où $\rho = (\sigma_1) \in \mathcal{C}_1(X)$ avec $\sigma_1 \in \partial S_1$

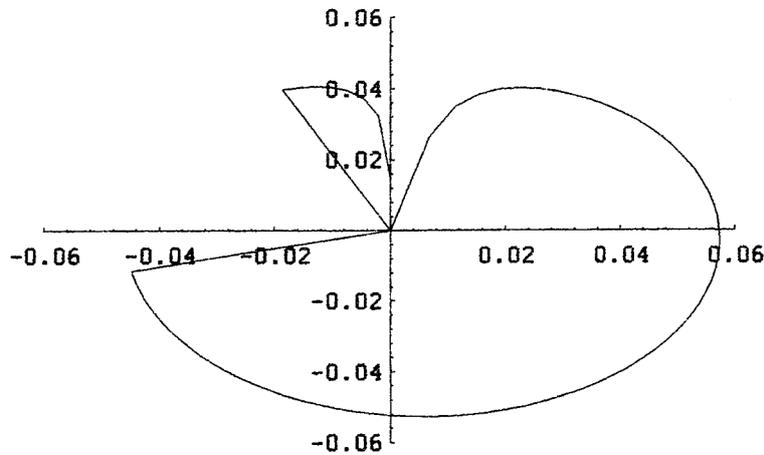


Figure 5.3: $|v_1^\nu(X; k\xi)| e^{\nu\nu}$ où $\nu = (\sigma_1) \in \mathcal{R}_1(X)$ avec $\sigma_1 \in \partial S_1$

La figure 5.5 fait apparaître deux différences entre les courbes. La première (zône α) correspond aux points X à l'ombre de S_1 :

pour ces angles $u_1^\rho(X; k\xi) = -e^{-ik\xi \cdot X}$ et $\mathcal{R}_1(X) = \emptyset$.

La seconde différence (zône β) est due à l'oubli de la sphère S_2 par la méthode intégrale: les 1-chemins correspondant sont ceux réfléchis par S_1 et traversant S_2 (ce qui est impossible

pour un 1-rayon). Nous verrons que cet *oubli* est corrigé lors du calcul de l'intégrale sur Γ_2 .

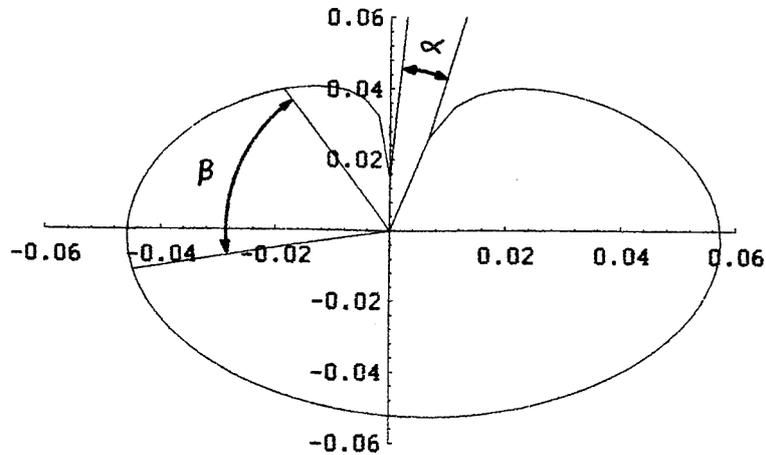


Figure 5.4: Superposition des figures 5.2 et 5.3

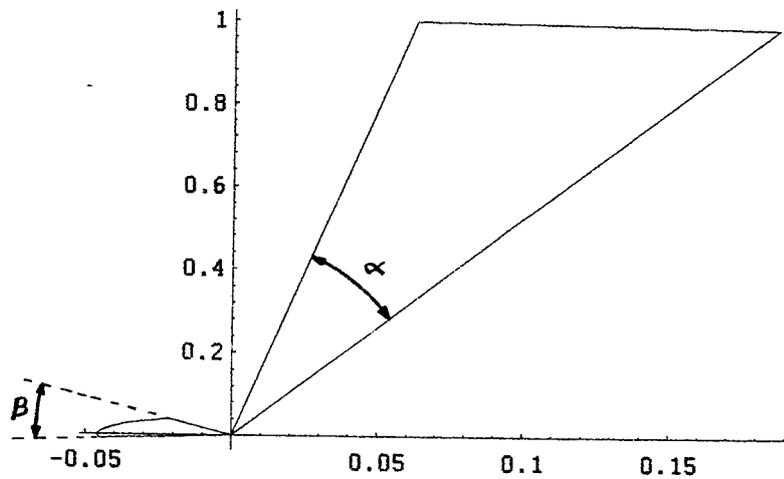


Figure 5.5: $|\tilde{u}_1^p(X; k\xi) - v_1^p(X; k\xi)| e^{2\varphi}$

5.2.2 Calcul des contributions de l'intégrale sur Γ_2

On compare les résultats obtenus (figure 5.6) avec ceux donnés par l'approximation de l'optique géométrique en double réflexion (figure 5.7)

La figure 5.9 fait apparaître deux différences entre les courbes. La première (zône α) est due à l'*oubli* de la sphère S_1 après deux réflexions et la deuxième (zône β) est le terme

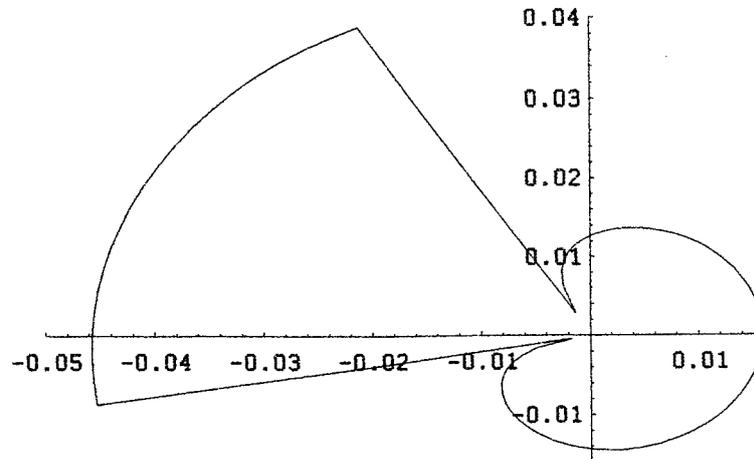


Figure 5.6: $| \tilde{u}_2^\rho(X; k\xi) | e^{i\varphi}$ où $\rho = (\sigma_1, \sigma_2) \in \mathcal{C}_2(X)$ avec $\sigma_1 \in \partial S_1, \sigma_2 \in \partial S_2$

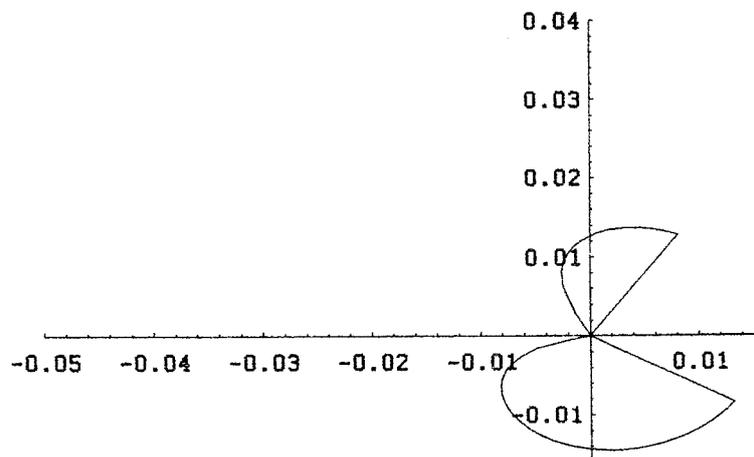


Figure 5.7: $| v_2^\nu(X; k\xi) | e^{i\varphi}$ où $\nu = (\sigma_1, \sigma_2) \in \mathcal{R}_2(X)$ avec $\sigma_1 \in \partial S_1, \sigma_2 \in \partial S_2$

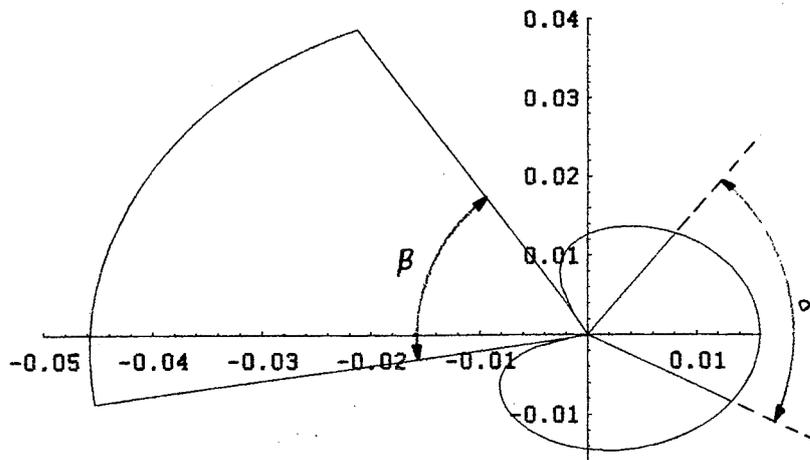
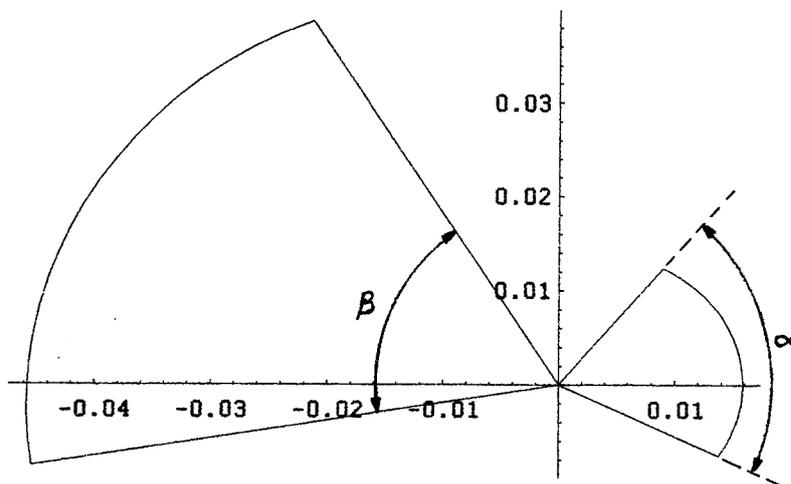


Figure 5.8: Superposition des figures 5.6 et 5.7

Figure 5.9: $|\tilde{u}_2^\beta(X; k\xi) - v_2^\beta(X; k\xi)| e^{2\varphi}$

correctif correspondant à l'oubli de la sphère S_2 en simple réflexion sur S_1 . Pour mieux le voir, on représente en figure 5.10 la quantité

$$|\tilde{u}_1^{\rho_1}(X; k\xi) + \tilde{u}_2^{\rho_2}(X; k\xi)| e^{i\varphi}$$

où

$$\rho_1 = (\sigma_1) \in C_1(X), \quad \sigma_1 \in \partial S_1$$

et

$$\rho_2 = (\sigma_1, \sigma_2) \in C_2(X), \quad \sigma_1 \in \partial S_1 \text{ et } \sigma_2 \in \partial S_2$$

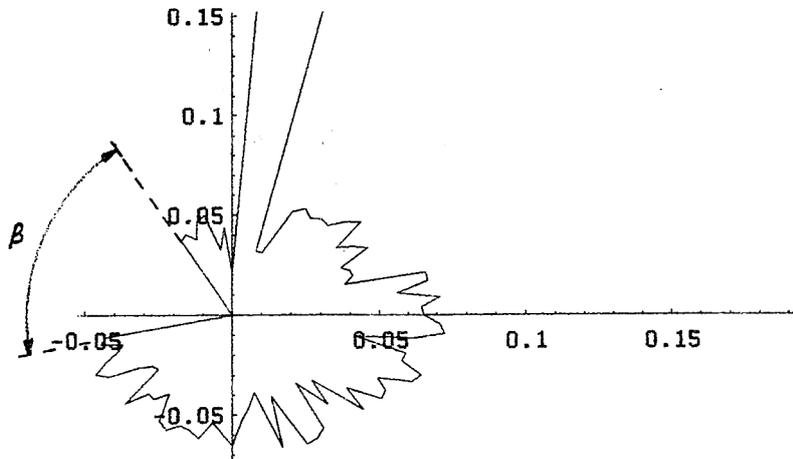


Figure 5.10: $|\tilde{u}_1^{\rho_1}(X; k\xi) + \tilde{u}_2^{\rho_2}(X; k\xi)| e^{i\varphi}$

On obtient dans le zône β : $|\tilde{u}_1^{\rho_1}(X; k\xi) + \tilde{u}_2^{\rho_2}(X; k\xi)| = 0$. Ceci découle du Lemme 3.3.

5.2.3 conclusion

D'autres tests ont été effectués en poussant les calculs jusqu'aux réflexions triples (plusieurs sphères de rayon quelconque, plusieurs ellipsoïdes,...). Ils ont permis, là aussi, de vérifier les Lemmes 3.2 et 3.3. Les mêmes phénomènes apparaissant, on omet ici ces figures, par soucis de concision.

5.3 Algorithme 2

Comme annoncé dans sa description, il faut tout d'abord déterminer les voisinages $\mathcal{V}(\sigma_i^p)$ de σ_i^p sur lesquels on intègre (le but étant de réduire leur taille au maximum tout en gardant

une bonne précision).

Pour cela on étudie numériquement les intégrales fortement oscillantes du type

$$\int_X a(x)e^{ik\varphi(x)} dx$$

On se limite aux études monodimensionnelles et bidimensionnelles d'intégrales fortement oscillantes pour lesquelles

- une solution exacte peut être déterminée pour comparaison et validation.
- la phase φ est indéfiniment dérivable et stationne en un unique point x_s de X .
- le hessien de la phase est non dégénérée en x_s : on fera l'expérimentation avec un hessien dont les valeurs propres sont de l'ordre de 1. Une simulation en faisant varier ce paramètre est inutile : la **grandeur significative** est le produit de ce paramètre par k . Faire varier k suffira à estimer la sensibilité des méthodes d'intégration.
- l'amplitude a est indéfiniment dérivable et nulle sur ∂X .

Ces hypothèses permettent l'emploi du corollaire 6.3.

5.3.1 cas monodimensionnel

On choisit pour domaine d'intégration l'intervalle $[a, b]$ ($a < b$), pour amplitude $a(x) = \sqrt{k}(x-a)(x-b)$ et pour phase $\varphi(x) = Ax^2 + Bx + C$.

On souhaite réduire la taille de l'intervalle $[a, b]$ dans le calcul de l'intégrale

$$I(k) = \int_a^b \sqrt{k}(x-a)(x-b)e^{ik(Ax^2+Bx+C)} dx$$

Remarque : On choisit les réels a, b, A, B, C tels que la phase stationne en un unique point x_s de $[a, b]$.

Pour le calcul numérique des intégrales on utilise deux méthodes classiques : la méthode de Simpson et la méthode des rectangles. L'étude va montrer que la différence d'ordre n'est pas significative, à notre précision.

- Méthode de Simpson

$$\int_{x_1}^{x_3} g(x) dx \approx \frac{h}{3}(g(x_1) + 4g(x_2) + g(x_3))$$

où $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = h > 0$

- Méthode des rectangles

$$\int_{x_1}^{x_2} g(x) dx \approx hg(x_1 + \frac{h}{2})$$

où $x_2 - x_1 = h > 0$

Pour réduire la taille du domaine d'intégration, il faut utiliser une fonction cut-off valant 1 au point de phase stationnaire et ceci pour conserver la nullité de l'amplitude sur le bord du voisinage. On choisit pour fonction cut-off de référence la fonction continue suivante représentée en figure 5.11:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ 5x + 5 & \text{si } -1 \leq x < -0.8 \\ 1 & \text{si } -0.8 \leq x < 0.8 \\ 5x + 5 & \text{si } 0.8 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Pour le caractère non C^∞ de f , voir la conclusion qui suit la figure 5.18.

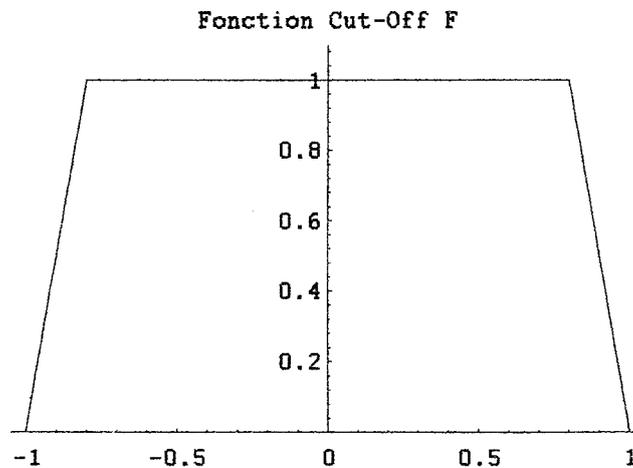


Figure 5.11: Représentation de la fonction cut-off $f(x)$

On prend par la suite $a = -1$, $b = 1$, $A = 3$, $B = -2$ et $C = 4$. La phase stationne alors en $x_s = \frac{1}{3} \in]-1, 1[$.

On note

$$I_k^f(\beta) = \int_{x_s - \beta}^{x_s + \beta} \sqrt{k}(x+1)(x-1) f\left(\frac{x-x_s}{\beta}\right) e^{ik(3x^2-2x+4)} dx$$

On représente l'erreur relative entre $I(k)$ (calculé formellement par *Mathematica*) et l'approximation numérique de $I_k^f(\beta)$ par la méthode de Simpson et la méthode des rectangles pour les nombres d'ondes $k = 100, 1000, 10000$.

On fait varier β et N (nombre de points de discrétisation utilisés par les méthodes d'intégration).

$$\beta = 0.04 + j0.04 \quad j \in \{1, \dots, 24\}$$

$$N = 100i \quad i \in \{1, \dots, 25\}$$

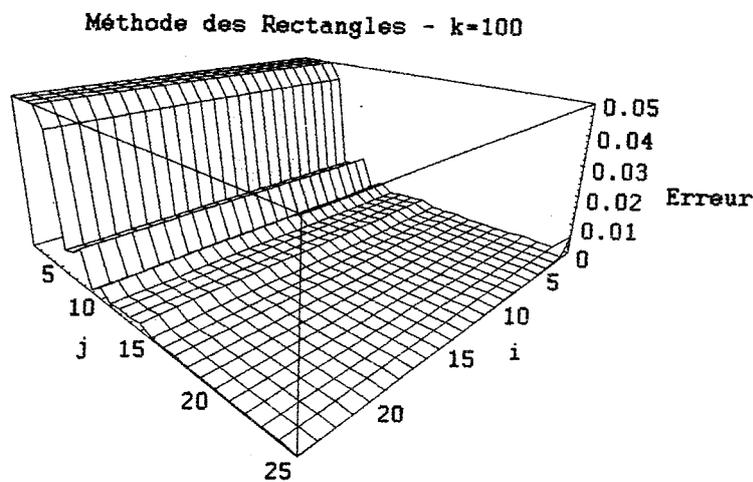


Figure 5.12: Erreur relative avec méthode des rectangles et $k = 100$

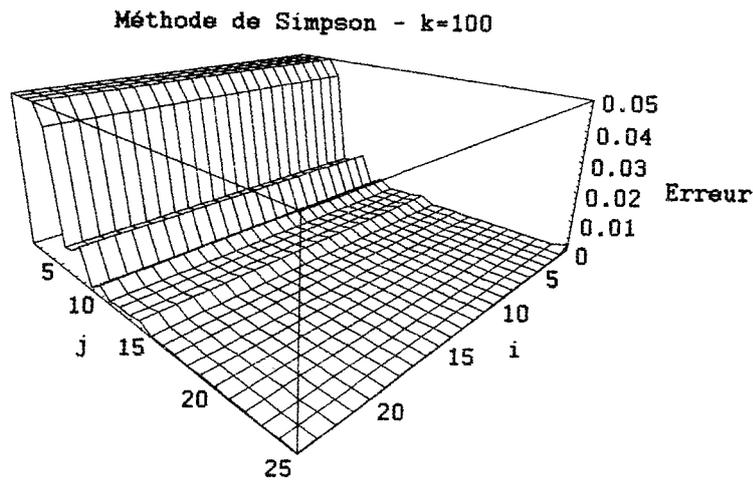
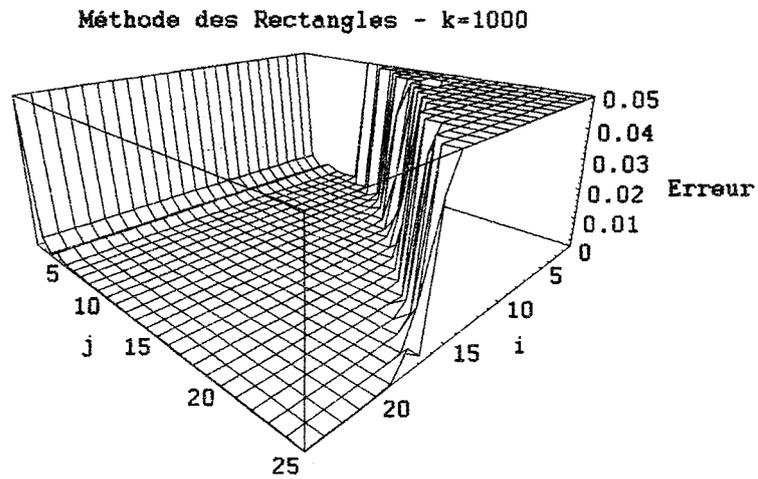
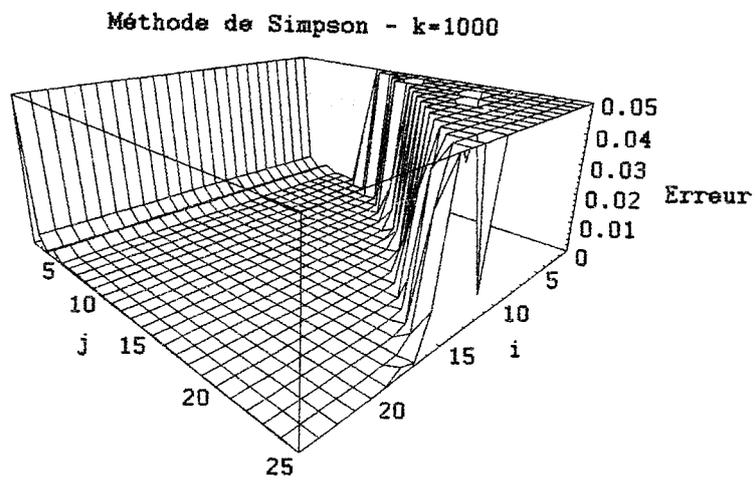


Figure 5.13: Erreur relative avec méthode de Simpson et $k = 100$

Figure 5.14: Erreur relative avec méthode des rectangles et $k = 1000$ Figure 5.15: Erreur relative avec méthode de Simpson et $k = 1000$

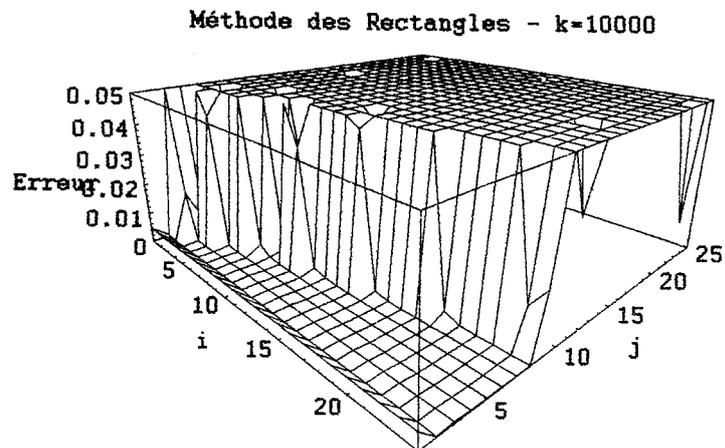


Figure 5.16: Erreur relative avec méthode des rectangles et $k = 10000$

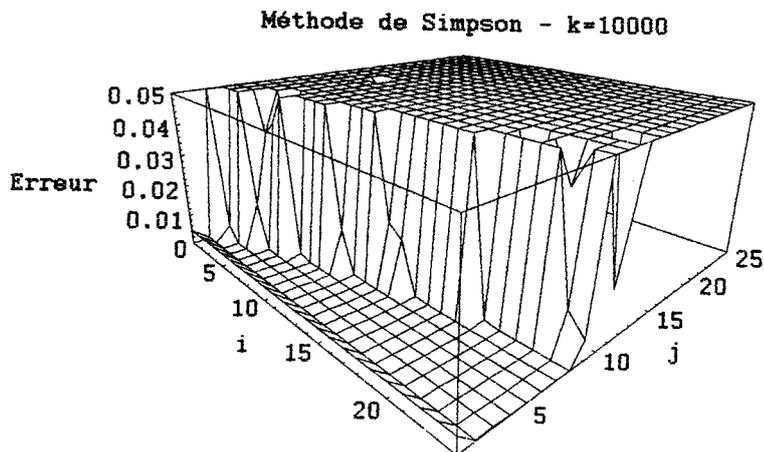


Figure 5.17: Erreur relative avec méthode de Simpson et $k = 10000$

On représente (figure 5.18) le graphe de l'erreur relative entre $I(k)$ et l'approximation numérique de $I_k^1(\beta)$ par la méthode de Simpson et pour $k = 1000$ (i.e. on omet la fonction cut-off).

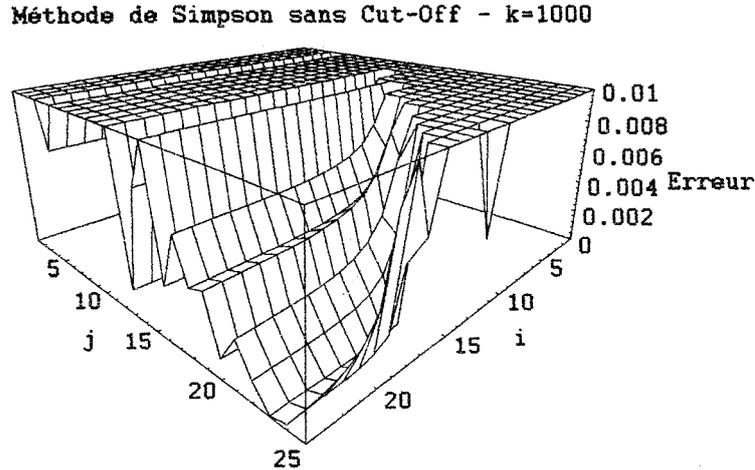


Figure 5.18: Erreur relative sans cut-off

Conclusion :

- L'emploi de la méthode de Simpson n'apporte aucun gain significatif par rapport à la méthode des rectangles.
- L'utilisation de la fonction cut-off se révèle indispensable.
- L'utilisation d'une fonction cut-off indéfiniment dérivable n'apporte aucun gain significatif lors des calculs : **l'essai fait avec des fonctions régulières le montre.** On ne représente pas ces essais ici par soucis de concision.
- Les essais précédents montrent que le bon paramètre est $\frac{j}{i}$. Pour avoir une erreur petite, il faut $\frac{2}{5} < \frac{j}{i} < \frac{4}{5}$.
- Le choix optimum entre la taille du domaine d'intégration et le nombre de points de discrétisation dépend du nombre d'onde k .

Soit $A > 0$, on définit un voisinage $]a_A^k, b_A^k[$ de x_s :

$$]a_A^k, b_A^k[= \left\{ x \in [a, b] \text{ tels que } |\varphi(x_s) - \varphi(x)| < \frac{A}{k} \right\}$$

et on note

$$I_k(A) = \int_{a_A^k}^{b_A^k} \sqrt{k}(x+1)(x-1) f\left(\frac{2x - (a_A^k + b_B^k)}{b_A^k - a_B^k}\right) e^{ik(3x^2 - 2x + 4)} dx$$

On représente l'erreur relative entre $I(k)$ et l'approximation numérique de $I_k(A)$ par la méthode de Simpson et la méthode des rectangles pour les nombres d'ondes $k = 100, 1000, 10000$. On fait varier A et N (nombre de points de discrétisation utilisés par les méthodes d'intégration).

$$A = 10 + 5j \quad j \in \{1, \dots, 20\}$$

$$N = 10 + 10i \quad i \in \{1, \dots, 24\}$$

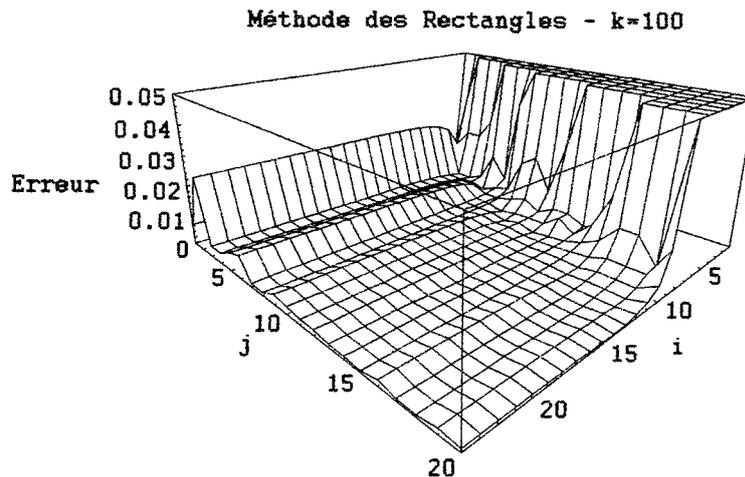


Figure 5.19: Erreur relative (méthode des rectangles) sur $]a_A^k, b_A^k[$ et $k = 100$

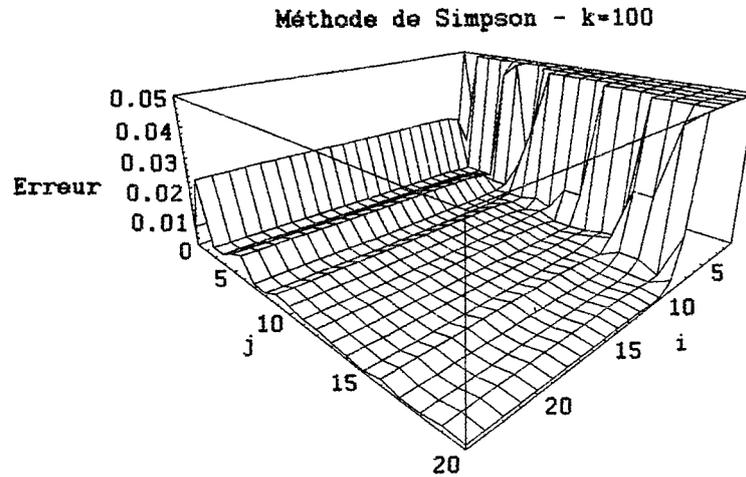


Figure 5.20: Erreur relative (méthode de Simpson) sur $|a_A^k, b_A^k|$ et $k = 100$

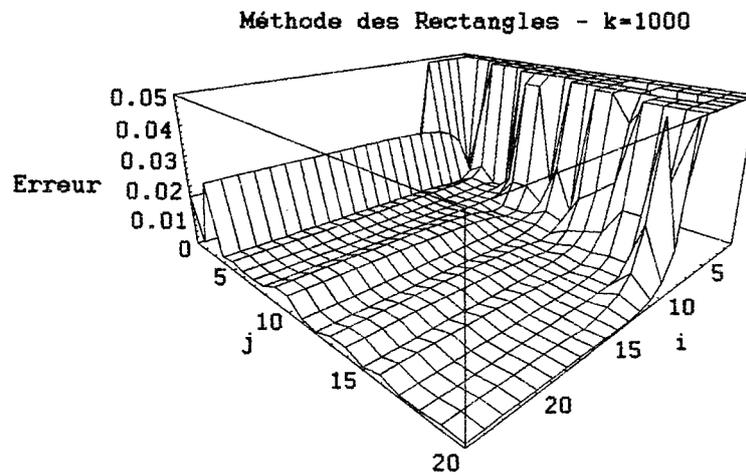


Figure 5.21: Erreur relative (méthode des rectangles) sur $|a_A^k, b_A^k|$ et $k = 1000$

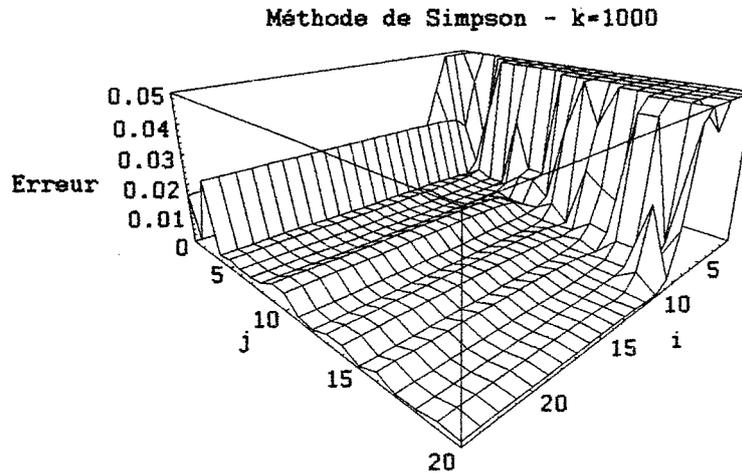


Figure 5.22: Erreur relative (méthode de Simpson) sur $|a_A^k, b_A^k|$ et $k = 1000$

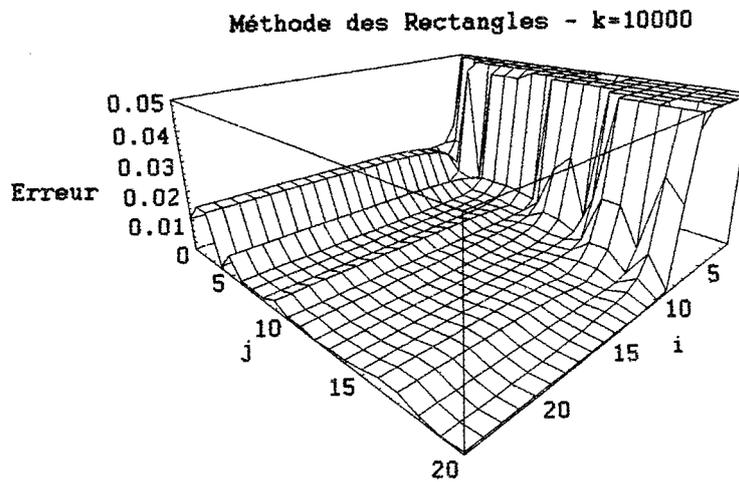


Figure 5.23: Erreur relative (méthode des rectangles) sur $|a_A^k, b_A^k|$ et $k = 10000$

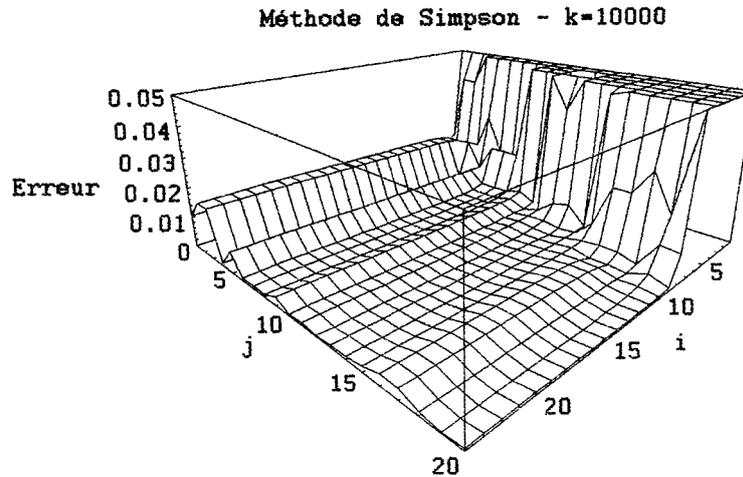


Figure 5.24: Erreur relative (méthode de Simpson) sur $]a_A^k, b_A^k[$ et $k = 10000$

Conclusion

Ces études montrent que A et N doivent être choisis suffisamment grand (ce qui coule de source). Néanmoins, un choix d'une valeur relativement petite de A n'obère pas sérieusement la précision : elle reste, en valeur relative, inférieure à 10^{-2} . Par ailleurs, l'étude montre que le rapport $\frac{A}{N}$ doit être compris entre 2 et 5. Une estimation plus fine, donnée au paragraphe suivant affine cette estimation en fonction de k .

5.3.2 cas bidimensionnel

On se propose de calculer numériquement

$$I(k) = \int_{-2}^2 \int_{-2}^2 k(x^2 - 4)(y^2 - 4)e^{2k(2x^2 - 2y^2 + 3x - 2y + 5)} dy dx$$

Remarque : L'amplitude est nulle sur le bord du domaine d'intégration et la phase $\varphi(x, y) = 2x^2 - 2y^2 + 3x - 2y + 5$ est non dégénérée et stationne au point $(x_s, y_s) = (-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2})$.

Soit $A > 0$. On définit un voisinage $]a_A^k, b_A^k[\times]c_A^k, d_A^k[$ de (x_s, y_s) dans $[-2, 2] \times [-2, 2]$ par :

$$]a_A^k, b_A^k[\times]c_A^k, d_A^k[= \left\{ (x, y) \in [-2, 2] \times [-2, 2] \text{ tels que } |\varphi(x_s, y_s) - \varphi(x, y)| < \frac{A}{k} \right\}$$

On note

$$I_A(k) = k \int_{a_A^k}^{b_A^k} \int_{c_A^k}^{d_A^k} (x^2 - 4)(y^2 - 4) f\left(\frac{2x - (a_A^k + b_A^k)}{b_A^k - a_A^k}\right) f\left(\frac{2y - (c_A^k + d_A^k)}{d_A^k - c_A^k}\right) e^{2k\varphi(x,y)} dy dx$$

où f est la fonction définie antérieurement.

On calcule cette intégrale en utilisant des éléments de références triangulaires pour $k = 100, 1000$ et 10000 .

Méthode d'ordre 2 :

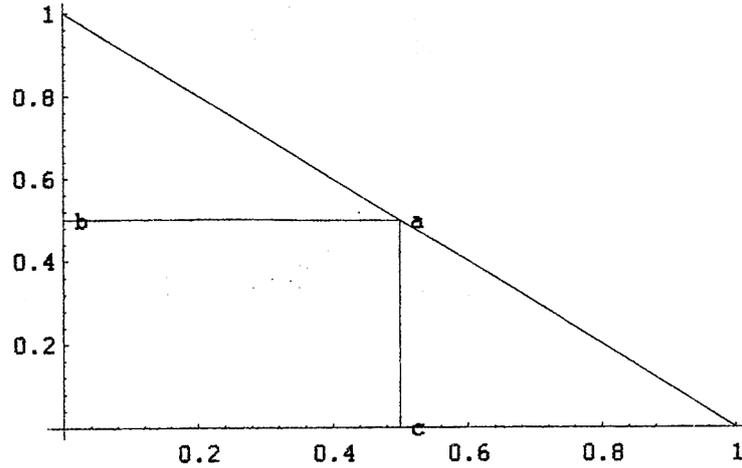


Figure 5.25: Méthode d'ordre 2

$$\int_0^1 \int_0^{1-\zeta} g(\zeta, \eta) d\eta d\zeta \approx \frac{g(a) + g(b) + g(c)}{6}$$

avec $a = (1/2, 1/2)$, $b = (0, 1/2)$ et $c = (1/2, 0)$. Cette méthode intègre exactement les polynômes d'ordre 2.

Méthode d'ordre 3 :

$$\int_0^1 \int_0^{1-\zeta} g(\zeta, \eta) d\eta d\zeta \approx -\frac{27}{96}g(a) + \frac{25}{96}(g(b) + g(c) + g(d))$$

avec $a = (1/3, 1/3)$, $b = (1/5, 1/5)$, $c = (3/5, 1/5)$ et $d = (1/5, 3/5)$. Cette méthode intègre exactement les polynômes d'ordre 3.

On représente (figures 5.27 à 5.32) l'erreur relative entre $I(k)$ et l'approximation numérique de $I_A(k)$ par ces deux méthodes pour :

$$A = 10 + 5j \quad j \in \{1, \dots, 20\}$$

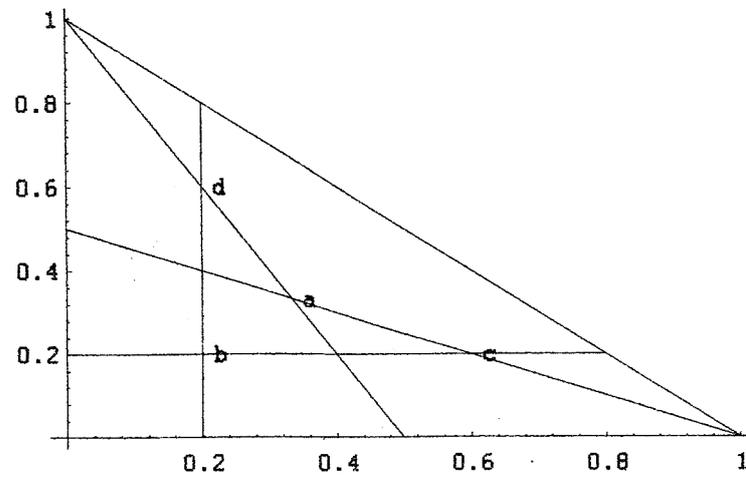
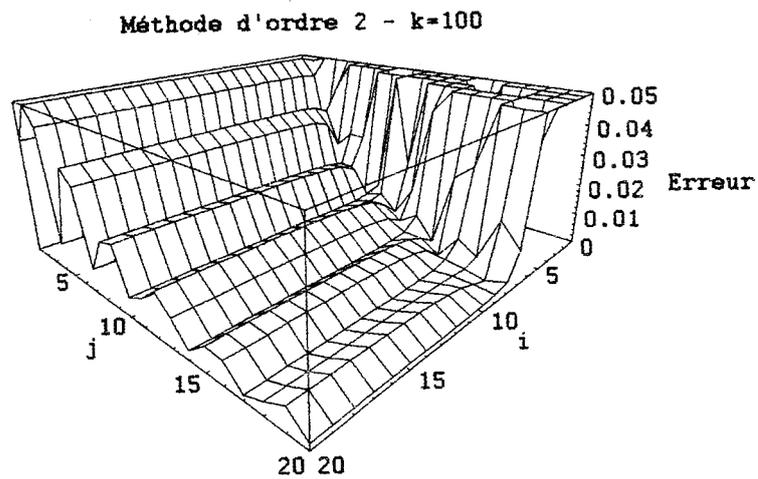
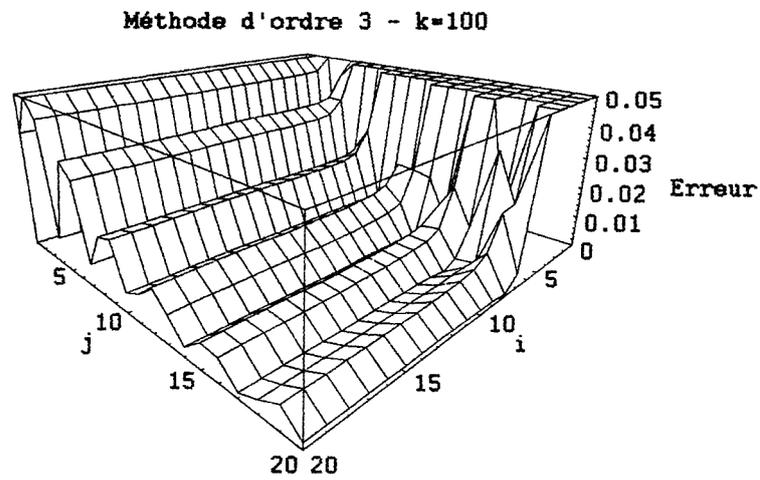
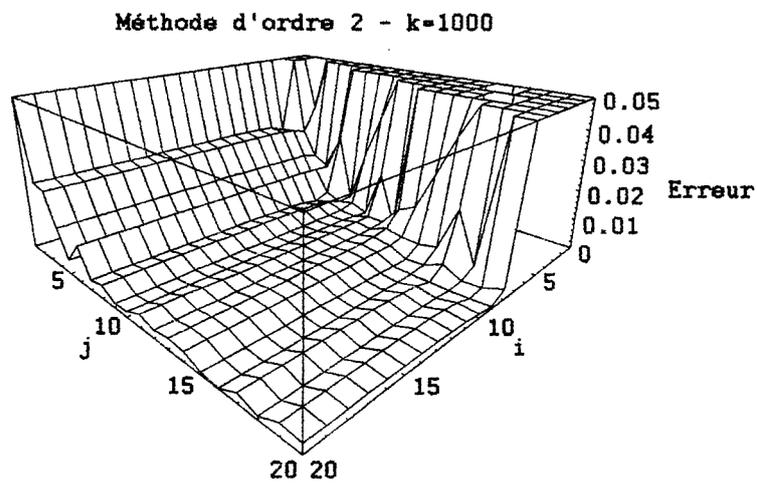


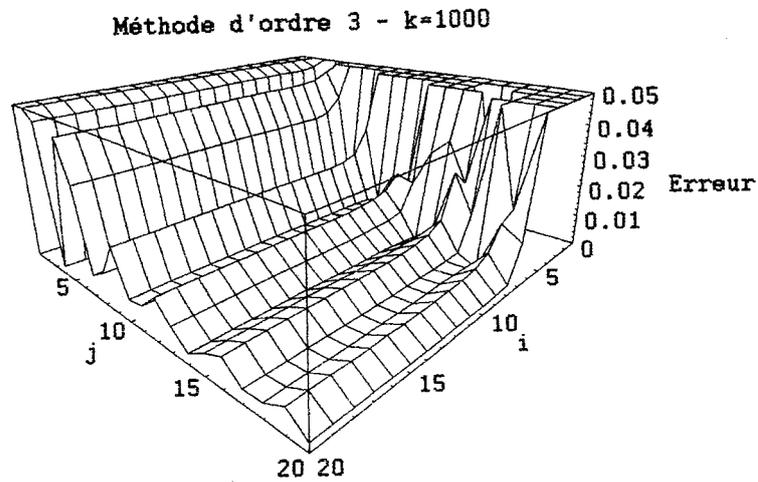
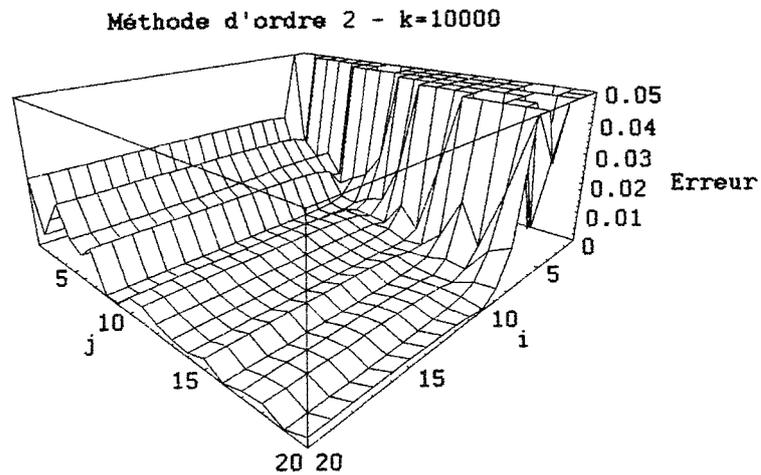
Figure 5.26: Méthode d'ordre 3

$$N = 10 + 10i \quad i \in \{1, \dots, 24\}$$

où N est le nombre de subdivisions des intervalles.

Figure 5.27: Erreur relative - Méthode d'ordre 2 - $k = 100$

Figure 5.28: Erreur relative - Méthode d'ordre 3 - $k = 100$ Figure 5.29: Erreur relative - Méthode d'ordre 2 - $k = 1000$

Figure 5.30: Erreur relative - Méthode d'ordre 3 - $k = 1000$ Figure 5.31: Erreur relative - Méthode d'ordre 2 - $k = 10000$

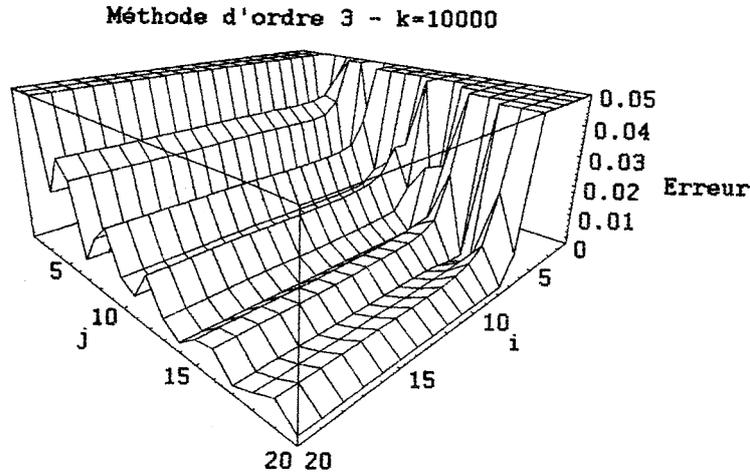


Figure 5.32: Erreur relative - Méthode d'ordre 3 - $k = 10000$

Conclusion :

- La méthode d'ordre 3 n'apporte aucun gain significatif lors des calculs.
- On choisira, par la suite $A = 20$ (environ trois longueur d'onde) et $N = 60$.
- Avec ce choix, la précision relative est peu sensible à la taille de k : en effet, la taille de k est prise en compte dans le choix de la taille du voisinage et de la taille de la discrétisation.

5.3.3 Intégration au dernier rebond

Soit $x \in \Omega \setminus T$ et $\rho = (\sigma_1^p, \dots, \sigma_l^p) \in C_l(x)$. On définit $\mathcal{V}(\sigma_l^p)$ par

$$\mathcal{V}(\sigma_l^p) = \sigma_l \in \partial\Omega \text{ tels que } |\psi_l(x; \rho) - \psi_l(x; \nu(\sigma_l), \sigma_l)| < \frac{A}{k}$$

où $\nu(\sigma_l)$ est le $l-1$ -chemin généralisé passant par σ_l .

Le but, ici, est de valider le choix de ce voisinage. A l'aide des paragraphes précédents, on choisit $A = 20$, le nombre de subdivision est $N = 60$ et on prend la méthode d'ordre 2 pour le calcul de l'intégrale.

On prend comme cas modèle Ω' réunion de deux sphères de rayon un. La première notée S_1 , est centrée en $(0, 2, 0)$. Le centre de la seconde, notée S_2 , est située en $(0, -2, 0)$. Le nombre d'onde k vaut 1000 et la direction de propagation de l'onde incidente est $\xi = (0, 0, 1)$. On calcule les contributions des différents chemins passant aux points X du cercle de rayon

10 centré dans le plan ηOz . Ce plan est assimilé au plan complexe : un point X du cercle s'écrit $10e^{i\varphi}$.

Les résultats obtenus sont comparés avec ceux donnés par l'algorithme 1.

Calcul des contributions de l'intégrale sur Γ_1

On note \bar{u} le calcul pour notre approximation avec intégration au dernier rebond sur les voisinages des points stationnaires, \bar{u}^ρ la contribution du chemin ρ par cette approximation, u le calcul par application du théorème de phase stationnaire, u^ρ la contribution du chemin ρ dans ce calcul.

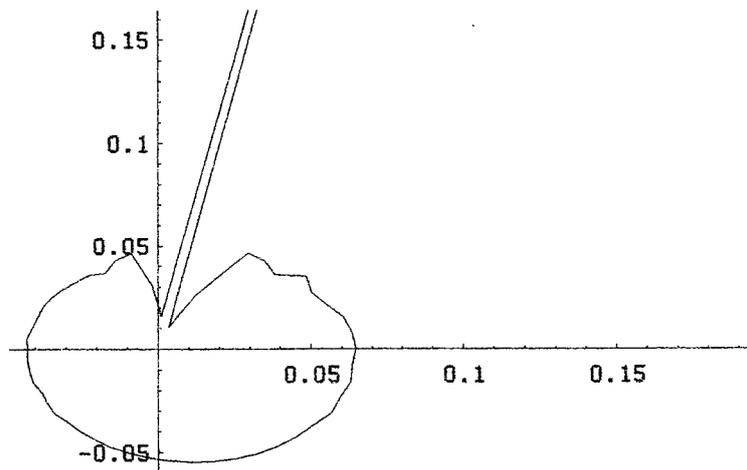


Figure 5.33: $|\bar{u}_1^\rho(X; k\xi)| e^{i\varphi}$ où $\rho = (\sigma_1) \in \mathcal{C}_l(X)$, $\sigma_1 \in \partial S_1$

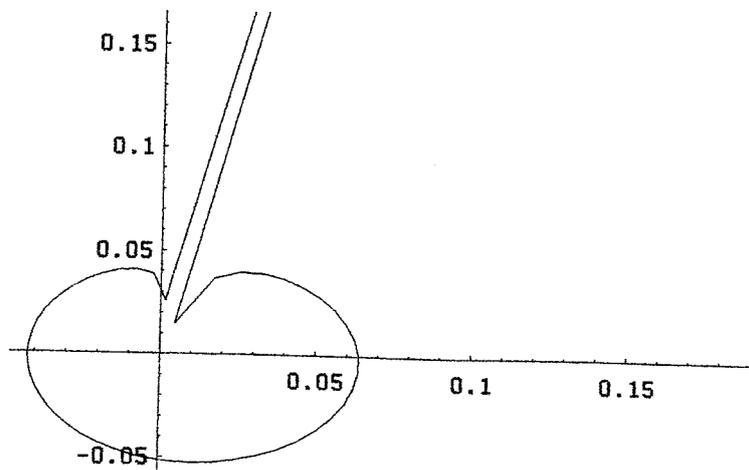


Figure 5.34: $|u_1^\rho(X; k\xi)| e^{2\varphi}$ où $\rho = (\sigma_1) \in \mathcal{C}_l(X)$, $\sigma_1 \in \partial S_1$

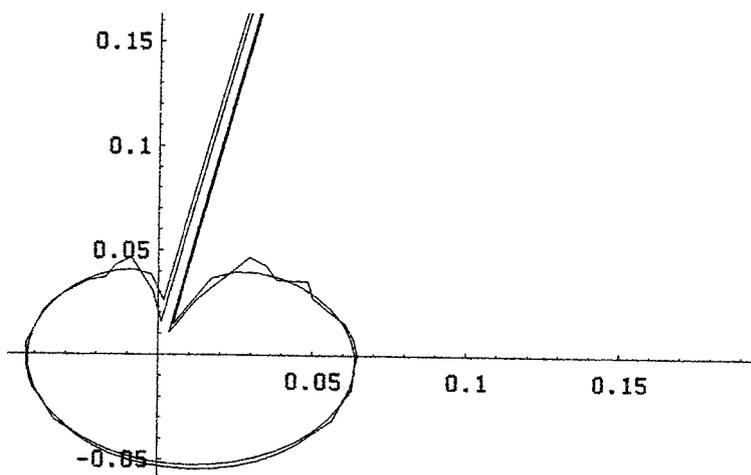


Figure 5.35: Superposition des figures 5.33 et 5.34

Remarque : La différence des deux méthodes provient, d'après la figure 5.35, des contributions des rayons proches de rayons tangents. Ceci implique la nécessité, pour une telle contribution, d'un choix plus raffiné du voisinage utilisé lors de l'intégration.

Calcul des contributions de l'intégrale sur Γ_2

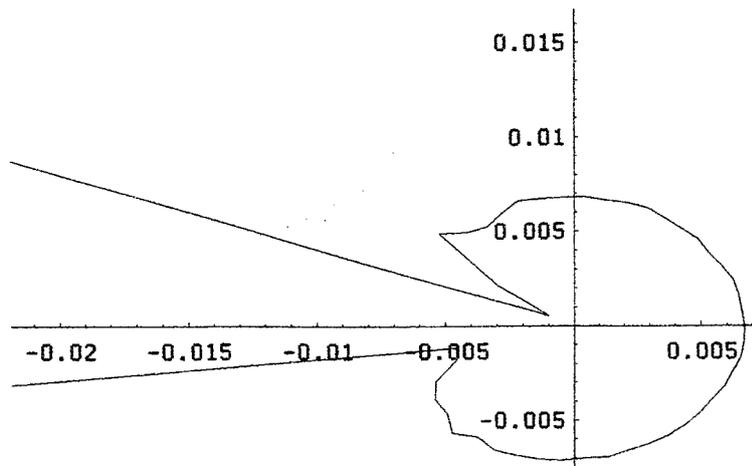


Figure 5.36: $|\overline{u_2^\rho(X; k\xi)}| e^{\nu\varphi}$ où $\rho = (\sigma_1, \sigma_2) \in \mathcal{C}_2(X)$, $\sigma_1 \in \partial S_1$ et $\sigma_2 \in \partial S_2$

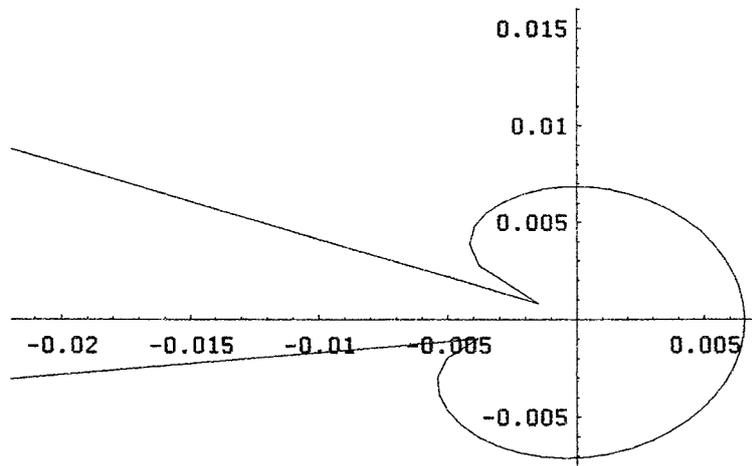


Figure 5.37: $|u_2^\rho(X; k\xi)| e^{\nu\varphi}$ où $\rho = (\sigma_1, \sigma_2) \in \mathcal{C}_2(X)$, $\sigma_1 \in \partial S_1$ et $\sigma_2 \in \partial S_2$

Même remarque que précédemment.

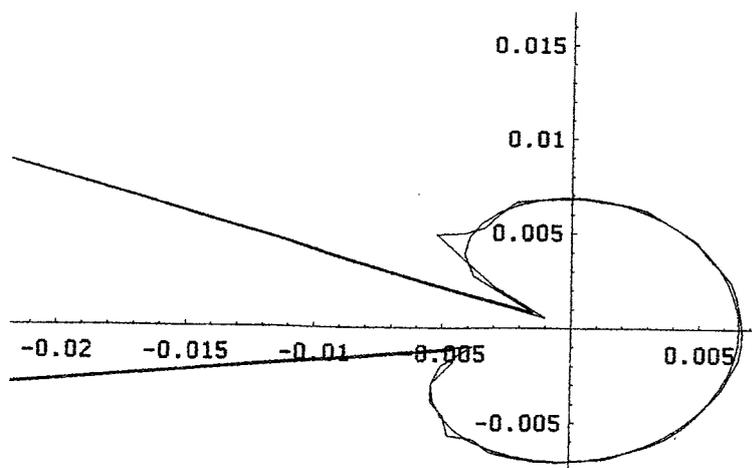
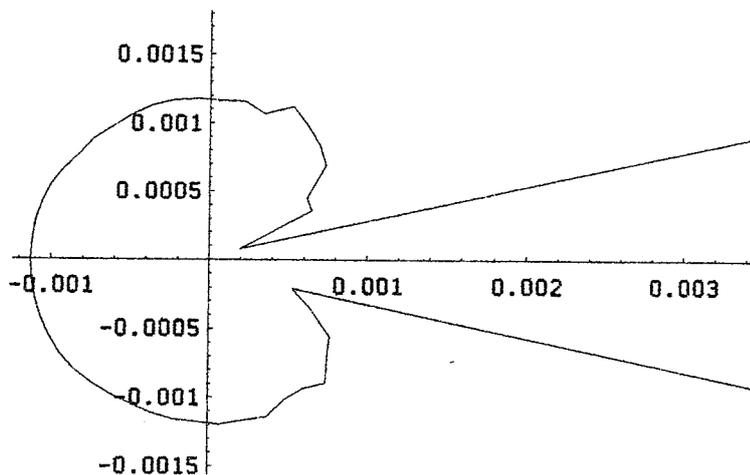


Figure 5.38: Superposition des figures 5.36 et 5.37

Calcul des contributions de l'intégrale sur Γ_3

Figure 5.39: $|\overline{u_3^\rho}(X; k\xi)| e^{i\varphi}$ où $\rho = (\sigma_1, \dots, \sigma_3) \in \mathcal{C}_3(X)$, $\sigma_1, \sigma_3 \in \partial S_1$ et $\sigma_2 \in \partial S_2$

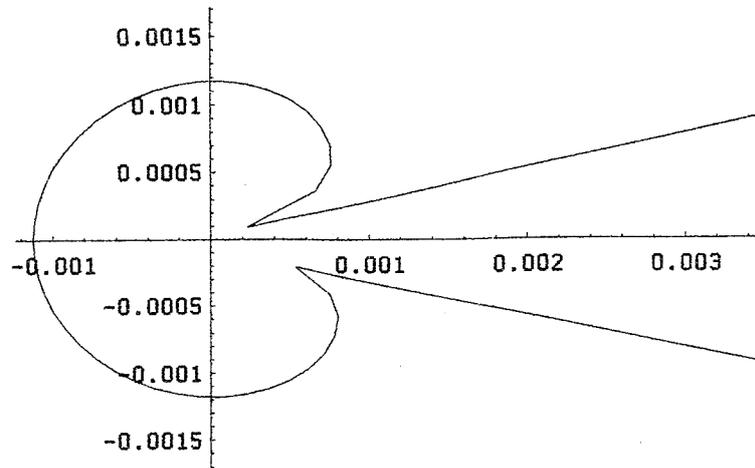


Figure 5.40: $|u_3^\rho(X; k\xi)| e^{i\varphi}$ où $\rho = (\sigma_1, \dots, \sigma_3) \in \mathcal{C}_3(X)$, $\sigma_1, \sigma_3 \in \partial S_1$ et $\sigma_2 \in \partial S_2$

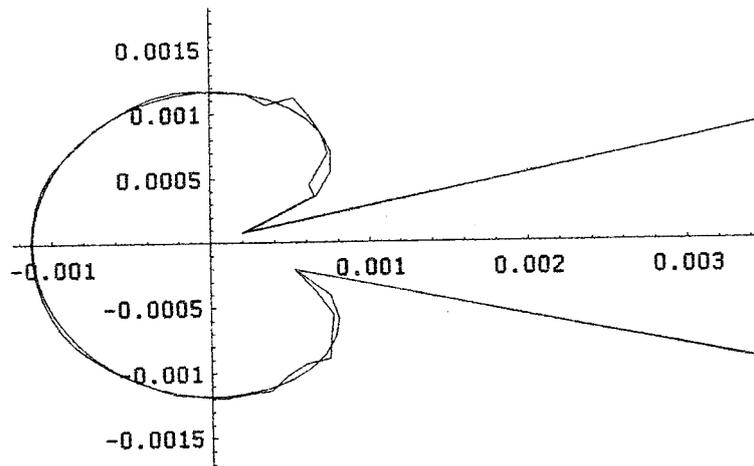


Figure 5.41: Superposition des figures 5.39 et 5.40

Remarque : la comparaison des contributions des intégrales sur Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 fait apparaître la décroissance de l'amplitude en fonction de la longueur du chemin optique: les amplitudes passent de 6.10^{-2} à 6.10^{-3} puis à 10^{-3} , pour une distance entre les sphères de 2.

5.3.4 Conclusion

Le choix de N et A dépend de la précision voulue (les essais précédents permettent de faire ce choix) et de l'ordinateur utilisé (temps de calculs). A titre d'exemple, sur un PC (486 DX 33 - Language C++), le temps de calcul de $\overline{u_2^p}(X; k\xi)$ représenté en figure 5.39 est de quatre heures. Un gain appréciable est obtenu par utilisation d'une station puissante. Mieux, ces calculs peuvent être grandement parallélisé (contributions chemin par chemin). Le temps de calcul devient performant.

5.4 conclusion générale

Cette méthode itérative se révèle efficace pour des objets à frontière C_2 . Cependant elle peut être fautive lorsque l'on est en présence d'arêtes ou de pointes.

Une comparaison de cette méthode avec des méthodes d'approximation directe est intéressante : elle n'est pas incluse ici car cette approximation directe est en cours d'implémentation par d'autres chercheurs. Elle n'est pas encore utilisable pleinement. Néanmoins les comparaisons déjà réalisées sont encourageantes.

Par ailleurs, il semble que dans la pratique, notre méthode reste efficace pour des objets non convexes. Nous avons réalisé les essais numériques dans de tels cas. Ils ne peuvent être inclus ici, vue l'impossibilité d'en démontrer théoriquement la validité : il manque, pour cela, une expression asymptotique de type G.T.D. dans un tel cas. En effet, si le théorème de propagation des singularités (en variables temporelles) est établi pour un rayon rampant dans une concavité, il n'existe pas, pour l'instant, d'estimation de l'amplitude de la solution de l'équation fréquentielle.

Chapitre 6

Rappel des théorèmes de phase stationnaire

6.1 Théorèmes de phase stationnaire

En vu de calculer un équivalent asymptotique ($k \rightarrow \infty$) de la solution de des équations d'Helmholtz et de Maxwell on a besoin de décrire le comportement asymptotique d'une intégrale oscillante du type suivant :

$$I_{\varphi,u}(x;k) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{ik\varphi(x,y)} u(x,y;k) dy \quad (6.1)$$

On montre que son comportement dépend uniquement de φ et u au voisinage des points de \mathcal{H}_φ où

$$\mathcal{H}_\varphi = \{(x,y) \mid \frac{d}{dy}\varphi(x,y) = 0\}.$$

La **méthode de la phase stationnaire** ou **méthode WKB** (Wentzel-Kramers-Brillouin) montre que l'intégrale (6.1) est équivalente à une somme

$$\sum_{j=1}^M e^{ik\varphi(x,y_j(x))} u(x,y_j(x);k) \quad (6.2)$$

où pour $j \in \{1, \dots, M\}$ les y_j sont, localement, des fonctions de x vérifiant :

$$(x, y_j(x)) \in \mathcal{H}_\varphi \text{ et}$$

$$y_j(x) \text{ est une singularité de } \varphi(x, \cdot)$$

(sous l'hypothèse que cette singularité est de type **Morse**).

Par contre, si les $y_j(x)$ ne sont pas des singularités de Morse (i.e. la matrice hessienne de $\varphi(x, \cdot)$ est dégénérée au point $y_j(x)$) alors cette approximation n'est plus valable .

L'outil principal utilisé dans cette thèse est le **Théorème de la phase stationnaire**. On peut en trouver une démonstration dans [4] et [5].

On cite, en premier lieu, des théorèmes classiques pour des points critiques non dégénérés puis on établit quelques corollaires.

Théorème 6.1 (Théorème de phase non stationnaire) Soient $X \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $\varphi \in C^\infty(X; \mathbb{R})$ tel que $d\varphi \neq 0$ partout.

$\forall K \subset\subset X$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C = C(k, \varphi, n)$ telle que

$$\left| \int e^{ik\varphi(x)} u(x) dx \right| \leq C \left(\sum_{|\alpha| \leq n} \sup | \partial^\alpha u(x) | \right) k^{-n}, \quad k \geq 1, \quad u \in C_0^\infty(K).$$

Théorème 6.2 (Théorème de phase stationnaire non dégénérée) Soient $X \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et $\varphi \in C^\infty(X; \mathbb{R})$ tel que φ possède un point critique non dégénéré $x_0 \in X$. On suppose de plus que $\varphi'(x) \neq 0$ pour $x \neq x_0$. Alors il existe des opérateurs différentiels d'ordre $\leq 2\nu$; $A_{2\nu}(D)$ tel que:

$\forall K \subset\subset X$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C = C(k, \varphi, n)$ telle que

$$\left| \int e^{ik\varphi(x)} u(x) dx - \left(\sum_{\nu=0}^{n-1} (A_{2\nu}(D)u)(x_0) k^{-\nu-\frac{d}{2}} \right) e^{ik\varphi(x_0)} \right| \leq \tag{6.3}$$

$$C k^{-n-\frac{d}{2}} \left(\sum_{|\alpha| \leq 2n+d+1} \sup | \partial^\alpha u(x) | \right), \quad k \geq 1, \quad u \in C_0^\infty(K).$$

De plus

$$A_0 = \frac{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}{|\det \varphi''(x_0)|^{\frac{1}{2}}} e^{i\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} \varphi''(x_0)}$$

6.2 Corollaires des théorèmes de phase stationnaire

Dans cette section, on étend le domaine d'emploi des théorèmes de phase stationnaire:

6.2.1 Itéré du théorème de phase stationnaire

On examine ici, et cet outil est central, la possibilité d'itérer l'approximation de la phase stationnaire. Ceci est donné par :

Corollaire 6.1 (Itération du théorème de phase stationnaire) *Soient n un entier, $n > 2$ et $i \in \{1, \dots, n\}$. Soient X_i un ouvert de \mathbb{R}^{d_i} et $K_i \subset\subset X_i$ un compact. On note $X = X_1 \times \dots \times X_n$ et $K = K_1 \times \dots \times K_n$.*

Soient $\varphi \in C_0^\infty(X)$, $\varphi(x) = \psi_0(x_1) + \sum_{j=1}^{n-1} \psi_j(x_j, x_{j+1}) + \psi_p(x_n)$ vérifiant

$$(i) \quad \nabla \varphi(x^0) = 0,$$

$$(ii) \quad \det \text{Hess } \varphi(x^0) \neq 0,$$

$$(iii) \quad \forall x \in X - \{x^0\} \quad \nabla \varphi(x) \neq 0.$$

On définit par récurrence

$$\begin{aligned} M_1 &= H_{x_1, x_1} \varphi \\ M_n &= (H_{x_n, x_n} \varphi - H_{x_{n-1}, x_n} \varphi [M_{n-1}]^{-1} H_{x_n, x_{n-1}} \varphi) \end{aligned}$$

où l'on suppose les matrices $M_j(x^0)$ inversibles pour tous $j \in \{1, \dots, n-1\}$.

On a alors:

1. *pour tout $j \in \{1, \dots, n-1\}$ il existe un voisinage ouvert U_j de x_j^0 dans X_j et une fonction $\bar{x}_j \in C^\infty(U_{j+1}; U_j)$ telle que, en notant*

$$\varphi_j(x_{j+1}, \dots, x_n) = \varphi_{j-1}(\bar{x}_j(x_{j+1}), x_{j+1}, \dots, x_n) \text{ avec } \varphi_0 = \varphi, \text{ on a:}$$

$$\forall x_{j+1} \in U_{j+1}$$

$$\nabla_{x_j} \varphi_{j-1}(\bar{x}_j(x_{j+1}), x_{j+1}, \dots, x_n) = 0,$$

$$\det H_{x_j, x_j} \varphi_{j-1}(\bar{x}_j(x_{j+1}), x_{j+1}, \dots, x_n) \neq 0 \text{ et}$$

$$\bar{x}_j(x_{j+1}^0) = x_j^0$$

De plus

$$H_{x_j, x_j} \varphi_{j-1}(\bar{x}_j(x_{j+1}), x_{j+1}, \dots, x_n) = M_j(\bar{x}(x_{j+1}))$$

avec

$$\bar{x}(x_{j+1}) = (\bar{x}_1(\dots \bar{x}_j(x_{j+1}) \dots), \dots, \bar{x}_j(x_{j+1}), x_{j+1}, \dots, x_n)$$

- 2.

$$\prod_{j=1}^n \det H_{x_j, x_j} \varphi_{j-1}(\bar{x}_j(x_{j+1}), x_{j+1}, \dots, x_n) |_{(x_{j+1}^0, \dots, x_n^0)} = \det \text{Hess } \varphi(x^0)$$

3. $\forall u \in C_0^\infty(K)$

$$\begin{aligned} & \int_X e^{ik\varphi(x)} u(x) dx \\ &= \\ & \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n d_j} \frac{e^{i\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} \operatorname{Hess} \varphi(x^0)}}{|\det \operatorname{Hess} \varphi(x^0)|^{\frac{1}{2}}} u(x^0) e^{ik\varphi(x^0)} + O(k^{-1-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n d_j}) \\ &= \\ & \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n d_j} \frac{e^{i\frac{\pi}{4} \sum_{j=1}^n \operatorname{sgn} H_{x_j, x_j} \varphi_{j-1}(x_j^0, \dots, x_n^0)}}{\prod_{j=1}^n |\det H_{x_j, x_j} \varphi_{j-1}(x_j^0, \dots, x_n^0)|^{\frac{1}{2}}} u(x^0) e^{ik\varphi(x^0)} + O(k^{-1-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n d_j}) \end{aligned}$$

et par identification

$$\operatorname{sgn} \operatorname{Hess} \varphi(x^0) = \sum_{j=1}^n \operatorname{sgn} H_{x_j, x_j} \varphi_{j-1}(x_j^0, \dots, x_n^0)$$

Preuve du corollaire 6.1

Preuve du 1.: Elle s'effectue par récurrence.

Au rang 1:

Par hypothèse nous avons

$$\nabla_{x_1} \varphi(x_1^0, \dots, x_n^0) = 0$$

et

$$\det H_{x_1, x_1} \varphi(x_1^0, \dots, x_n^0) = \det M_1(x_1^0, \dots, x_n^0) \neq 0$$

Comme

$$\nabla_{x_1} \varphi(x_1, \dots, x_n) = \nabla_{x_1} (\psi_0(x_1) + \psi_1(x_1, x_2))$$

On définit la fonction V_1 par:

$$V_1(x_1, x_2) = \nabla_{x_1} \varphi(x_1, \dots, x_n)$$

En prenant la dérivée en x_1 de la fonction V_1 on obtient

$$\nabla_{x_1} V_1(x_1, x_2) = H_{x_1, x_1} \varphi(x_1, \dots, x_n)$$

On a donc

$$V_1(x_1^0, x_2^0) = 0$$

et

$$\det \nabla_{x_1} V_1(x_1^0, x_2^0) \neq 0$$

Le théorème des fonctions implicites appliqué à la fonction V_1 définit x_1 comme fonction implicite de x_2 . Et par conséquent, il existe U_1 ouvert de X_1 contenant x_1^0 , U_2' ouvert de X_2 contenant x_2^0 et une fonction

$$\begin{cases} \bar{x}_1 : U_2' \longrightarrow U_1 \\ x_2 \longmapsto \bar{x}_1(x_2) \end{cases}$$

telle que

$$\begin{cases} \det \nabla_{x_1} V_1(x_1^0, x_2^0) \neq 0 \\ V_1(x_1^0, x_2^0) = 0 \\ (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 \\ V_1(x_1, x_2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = \bar{x}_1(x_2) \quad \forall x_2 \in U_2' \\ x_1^0 = \bar{x}_1(x_2^0) \\ V_1(\bar{x}_1(x_2), x_2) = 0 \\ \det \nabla_{x_1} V_1(\bar{x}_1(x_2), x_2) \neq 0 \end{cases}$$

On a donc

pour tous $x_2 \in U_2'$

$$\text{Hess}_{x_1} \varphi_0(\bar{x}_1(x_2), x_2, \dots, x_n) = M_1(\bar{x}_1(x_2), x_2, \dots, x_n) \quad \textit{invertible} \quad (6.4)$$

et

$$\nabla_{x_1} \varphi_0(\bar{x}_1(x_2), x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (6.5)$$

Le rang 1 ne permet pas de voir clairement la récurrence. C'est pourquoi on effectue les calculs au rang 2.

au rang 2:

- On établit tout d'abord

$$\nabla_{x_2} \varphi_1(x_2, \dots, x_n) = (\nabla_{x_2} \varphi_0)(\bar{x}_1(x_2), x_2, \dots, x_n) \quad (6.6)$$

Pour cela, on écrit

$$\begin{aligned} \nabla_{x_2} \varphi_1(x_2, \dots, x_n) &= \nabla_{x_2} (\varphi_0(\bar{x}_1(x_2), x_2, \dots, x_n)) \\ &= (\nabla_{x_2} \varphi_0)(\bar{x}_1(x_2), x_2, \dots, x_n) \\ &\quad + \nabla_{x_1} \varphi_0(\bar{x}_1(x_2), x_2, \dots, x_n) \nabla_{x_2} \bar{x}_1(x_2) \end{aligned}$$

et en utilisant (6.5) on obtient

$$\begin{aligned} \nabla_{x_2} \varphi_1(x_2, \dots, x_n) &= (\nabla_{x_2} \varphi_0)(\bar{x}_1(x_2), x_2, \dots, x_n) \\ &= \nabla_{x_2} \varphi_0(\bar{x}_1(x_2), x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

La formule (6.6) est donc démontrée.

- On a

$$\begin{aligned}\nabla_{x_2}\varphi_1(x_2, \dots, x_n) &= \nabla_{x_2}(\varphi_0(\bar{x}_1(x_2), x_2, \dots, x_n)) \\ &= \nabla_{x_2}(\psi_1(\bar{x}_1(x_2), x_2) + \psi_2(x_2, x_3))\end{aligned}$$

On définit la fonction V_2 par

$$V_2(x_2, x_3) = \nabla_{x_2}\varphi_1(x_2, \dots, x_n) \quad (6.7)$$

Par hypothèse $(\nabla_{x_2}\varphi_0)(x_1^0, \dots, x_n^0) = 0$. et $\bar{x}_1(x_2^0) = x_2^0$. Ceci donne:

$$V_2(x_2^0, x_3^0) = (\nabla_{x_2}\varphi_0)(x_1^0, \dots, x_n^0) \quad (6.8)$$

- Montrons que

$$\nabla_{x_2}V_2(x_2, x_3) = M_2(\bar{x}_1(x_2), x_2, \dots, x_n) \quad (6.9)$$

On a

$$\begin{aligned}\nabla_{x_2}V_2(x_2, x_3) &= \nabla_{x_2}((\nabla_{x_2}\varphi_0)(\bar{x}_1(x_2), x_2, \dots, x_n)) \\ &= (\nabla_{x_2}(\nabla_{x_2}\varphi_0))(\bar{x}_1(x_2), x_2, \dots, x_n) \\ &\quad + (\nabla_{x_1}(\nabla_{x_2}\varphi_0))(\bar{x}_1(x_2), x_2, \dots, x_n)\nabla_{x_2}\bar{x}_1(x_2)\end{aligned} \quad (6.10)$$

La dérivation en x_2 de (6.5) donne:

$$\forall x_2 \in U'_2$$

$$(H_{x_2, x_1}\varphi_0)(\bar{x}_1(x_2), x_2, \dots, x_n) + (H_{x_1, x_1}\varphi_0)(\bar{x}_1(x_2), x_2, \dots, x_n)\nabla_{x_2}\bar{x}_1(x_2) = 0$$

De (6.4) on a $(H_{x_1, x_1}\varphi_0)(\bar{x}_1(x_2), x_2, \dots, x_n)$ inversible et donc

$$\begin{aligned}\nabla_{x_2}\bar{x}_1(x_2) \\ = \\ -[(H_{x_1, x_1}\varphi_0)(\bar{x}_1(x_2), x_2, \dots, x_n)]^{-1} [(H_{x_2, x_1}\varphi_0)(\bar{x}_1(x_2), x_2, \dots, x_n)]\end{aligned}$$

En remplaçant $\nabla_{x_2}\bar{x}_1(x_2)$ dans (6.10) on obtient la formule (6.9)

Ceci donne au point (x_1^0, \dots, x_n^0)

$$\nabla_{x_2}V_2(x_2^0, x_3^0) = A_2(x_1^0, \dots, x_n^0) \text{ inversible} \quad (6.11)$$

- Les équations (6.8) et (6.11) permettent d'appliquer le théorème des fonctions implicites à la fonction V_2 . Ceci définit alors x_2 comme fonction implicite de x_3 . Et par

conséquent, il existe U_2'' ouvert de X_2 contenant x_2^0 , U_3' ouvert de X_3 contenant x_3^0 et une fonction

$$\begin{cases} \bar{x}_2 : U_3' \longrightarrow U_2'' \\ x_3 \longmapsto \bar{x}_2(x_3) \end{cases}$$

telle que

$$\begin{cases} \det \nabla_{x_2} V_2(x_2^0, x_3^0) \neq 0 \\ V_2(x_2^0, x_3^0) = 0 \\ (x_2, x_3) \in X_2 \times X_3 \\ V_2(x_2, x_3) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = \bar{x}_2(x_3) \quad \forall x_3 \in U_3' \\ x_2^0 = \bar{x}_2(x_3^0) \\ V_2(\bar{x}_2(x_3), x_3) = 0 \\ \det \nabla_{x_2} V_2(\bar{x}_2(x_3), x_3) \neq 0 \end{cases}$$

On a alors

$$\forall x_3 \in U_3'$$

$$\text{Hess}_{x_2} \varphi_1(\bar{x}_2(x_3), x_3, \dots, x_n) = M_2(\bar{x}_1(\bar{x}_2(x_3)), \bar{x}_2(x_3), \dots, x_n) \quad \text{invertible} \quad (6.12)$$

et

$$\nabla_{x_2} \varphi_1(\bar{x}_2(x_3), x_3, \dots, x_n) = 0 \quad (6.13)$$

On note $U_2 = U_2' \cap U_2''$

Au rang $p < n$:

Hypothèse de récurrence : (rang $p - 1$)

Il existe p ouverts U_1 de X_1, \dots, U_{p-1} de X_{p-1}, U_p' de X_p contenant respectivement x_1^0, \dots, x_p^0 et il existe $p - 1$ fonctions

$$\begin{cases} \bar{x}_1 : U_2 \longrightarrow U_1 \\ x_2 \longmapsto \bar{x}_1(x_2) \end{cases} \dots \begin{cases} \bar{x}_{p-1} : U_p' \longrightarrow U_{p-1} \\ x_p \longmapsto \bar{x}_{p-1}(x_p) \end{cases}$$

telle que, $\forall j \in \{1, \dots, p-1\}$, en notant $\varphi_j(x_{j+1}, \dots, x_n) = \varphi_{j-1}(\bar{x}_j(x_{j+1}), \dots, x_n)$ avec $\varphi_0 = \varphi$, on a

$$\forall x_{j+1} \in U_{j+1}$$

$$\left(\nabla_{x_j} \varphi_{j-1} \right) (\bar{x}_j(x_{j+1}), \dots, x_n) = 0 \quad (6.14)$$

et

$$\left(\text{Hess}_{x_j} \varphi_{j-1} \right) (\bar{x}_j(x_{j+1}), \dots, x_n) = M_j(\bar{x}_j(x_{j+1})) \quad (6.15)$$

De plus il existe des fonctions $V_j : U_j \times U_{j+1} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ données par

$$V_j(x_j, x_{j+1}) = \nabla_{x_j} \varphi_{j-1}(\bar{x}_j(x_{j+1}))$$

Montrons que les équations précédentes sont vraies au rang p .

- On prouve, tout d'abord, l'équation suivante :

$$(\nabla_{x_p} \varphi_{p-1})(x_p, \dots, x_n) = (\nabla_{x_p} \varphi_0)(\bar{x}(x_p)) \quad (6.16)$$

Par définition de φ_{p-1} :

$$\begin{aligned} & (\nabla_{x_p} \varphi_{p-1})(x_p, \dots, x_n) \\ &= \\ & \nabla_{x_p} (\varphi_0(\bar{x}(x_p))) \\ &= \\ & (\nabla_{x_p} \varphi_0)(\bar{x}(x_p)) \\ & + (\nabla_{x_{p-1}} \varphi_0)(\bar{x}(x_p)) \nabla_{x_p} \bar{x}_{p-1}(x_p) \\ & \quad \vdots \\ & + (\nabla_{x_1} \varphi_0)(\bar{x}(x_p)) \nabla_{x_p} (\bar{x}_1(\dots \bar{x}_{p-1}(x_p) \dots)) \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} & (\nabla_{x_{p-1}} \varphi_0)(\bar{x}(x_p)) = V_{p-1}(\bar{x}_{p-1}(x_p), x_p) = 0 \\ & \quad \vdots \\ & (\nabla_{x_1} \varphi_0)(\bar{x}(x_p)) = V_1(\bar{x}_1(\dots \bar{x}_{p-1}(x_p) \dots), \bar{x}_2(\dots \bar{x}_{p-1}(x_p) \dots)) = 0 \end{aligned}$$

Ce qui donne la formule (6.16).

On définit la fonction V_p par

$$V_p(x_p, x_{p+1}) = (\nabla_{x_p} \varphi_{p-1})(x_p, \dots, x_n) \quad (6.17)$$

- Montrons ensuite que

$$\begin{aligned}
& H_{x_p, x_p} \varphi_{p-1}(x_p, \dots, x_n) \\
& \quad = \\
& \quad (H_{x_p, x_p} \varphi_0)(\bar{x}(x_p)) \\
& \quad - \\
& \quad [(H_{x_{p-1}, x_p} \varphi_0)(\bar{x}(x_p))] \\
& \quad [(H_{x_{p-1}, x_{p-1}} \varphi_{p-1})(\bar{x}_{p-1}(x_p), x_p, \dots, x_n)]^{-1} \\
& \quad [(H_{x_p, x_{p-1}} \varphi_0)(\bar{x}(x_p))] \\
& \quad = \\
& \quad M_p(\bar{x}(x_p))
\end{aligned} \tag{6.18}$$

On a:

$$\begin{aligned}
& H_{x_p, x_p} \varphi_{p-1}(x_p, \dots, x_n) \\
& \quad = \\
& \quad H_{x_p, x_p}(\varphi_{p-2}(\bar{x}_{p-1}(x_p), x_p, \dots, x_n)) \\
& \quad = \\
& \quad (H_{x_p, x_p} \varphi_{p-2})(\bar{x}_{p-1}(x_p), x_p, \dots, x_n) \\
& \quad + (H_{x_{p-1}, x_p} \varphi_{p-2})(\bar{x}_{p-1}(x_p), x_p, \dots, x_n) \nabla_{x_p} \bar{x}_{p-1}(x_p)
\end{aligned} \tag{6.19}$$

Par construction de \bar{x}_{p-1} :

$$\forall x_p \in U'_p$$

$$\nabla_{x_{p-1}} \varphi_{p-2}(\bar{x}_{p-1}(x_p), x_p, \dots, x_n) = V_{p-1}(\bar{x}_{p-1}(x_p), x_p) = 0$$

En dérivant cette formule par rapport à x_p on obtient :

$$\begin{aligned}
& \nabla_{x_p} (\nabla_{x_{p-1}} \varphi_{p-2}(\bar{x}_{p-1}(x_p), x_p, \dots, x_n)) \\
& \quad = \\
& \quad (H_{x_p, x_{p-1}} \varphi_{p-2})(\bar{x}_{p-1}(x_p), x_p, \dots, x_n) \\
& \quad + (H_{x_{p-1}, x_{p-1}} \varphi_{p-2})(\bar{x}_{p-1}(x_p), x_p, \dots, x_n) \nabla_{x_p} \bar{x}_{p-1}(x_p) \\
& \quad = \\
& \quad 0
\end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}
& (H_{x_{p-1}, x_{p-1}} \varphi_{p-2})(\bar{x}_{p-1}(x_p), x_p, \dots, x_n) \\
& \quad = \\
& \quad M_{p-1}(\bar{x}_1(\dots \bar{x}_{p-1}(x_p) \dots), \dots, \bar{x}_{p-1}(x_p), \dots, x_n)
\end{aligned}$$

est non dégénérée, nous pouvons l'inverser et écrire

$$\begin{aligned} & \nabla_{x_p} \overline{x_{p-1}}(x_p) \\ &= \\ & - [(H_{x_{p-1}, x_{p-1}} \varphi_{p-2})(\overline{x_{p-1}}(x_p), x_p, \dots, x_n)]^{-1} \\ & \quad [(H_{x_p, x_{p-1}} \varphi_{p-2})(\overline{x_{p-1}}(x_p), x_p, \dots, x_n)] \end{aligned}$$

L'équation (6.19) devient alors

$$\begin{aligned} & H_{x_p, x_p} \varphi_{p-1}(x_p, \dots, x_n) \\ &= \\ & (H_{x_p, x_p} \varphi_{p-2})(\overline{x_{p-1}}(x_{p-1}), x_p, \dots, x_n) \\ & \quad - \\ & \quad [(H_{x_{p-1}, x_p} \varphi_{p-2})(\overline{x_{p-1}}(x_p), x_p, \dots, x_n)] \\ & \quad [(H_{x_{p-1}, x_{p-1}} \varphi_{p-2})(\overline{x_{p-1}}(x_p), x_p, \dots, x_n)]^{-1} \\ & \quad [(H_{x_p, x_{p-1}} \varphi_{p-2})(\overline{x_{p-1}}(x_p), x_p, \dots, x_n)] \end{aligned} \tag{6.20}$$

De plus

$$\begin{aligned} & (H_{x_p, x_p} \varphi_{p-1})(\overline{x_{p-1}}(x_p), x_p, \dots, x_n) \\ &= \\ & (H_{x_p, x_p} \varphi_0)(\overline{x}(x_p)) \end{aligned} \tag{6.21}$$

et

$$\begin{aligned} & (H_{x_{p-1}, x_p} \varphi_{p-2})(\overline{x_{p-1}}(x_p), x_p, \dots, x_n) \\ &= \\ & (H_{x_{p-1}, x_p} (\varphi_0(\overline{x}(x_{p-1}))))|_{x_{p-1}=\overline{x_{p-1}}(x_p)} \\ &= \\ & \nabla_{x_{p-1}} (\nabla_{x_p} \varphi_0(\overline{x}(x_{p-1})))|_{x_{p-1}=\overline{x_{p-1}}(x_p)} \\ &= \\ & (H_{x_{p-1}, x_p} \varphi_0)(\overline{x}(x_p)) \\ & + (H_{x_{p-2}, x_p} \varphi_0)(\overline{x}(x_p)) \nabla_{x_{p-1}} \overline{x_{p-2}}(x_{p-1})|_{x_{p-1}=\overline{x_{p-1}}(x_p)} \\ & \quad \vdots \\ & + (H_{x_1, x_p} \varphi_0)(\overline{x}(x_p)) \nabla_{x_{p-1}} \overline{x_1}(\dots \overline{x_{p-2}}(x_{p-1}) \dots)|_{x_{p-1}=\overline{x_{p-1}}(x_p)} \end{aligned}$$

Par définition de φ :

$$(H_{x_i, x_p} \varphi_0) = 0 \text{ pour } i < p - 1.$$

Ceci donne

$$(H_{x_{p-1}, x_p} \varphi_{p-2})(\overline{x_{p-1}}(x_p), x_p, \dots, x_n) = (H_{x_{p-1}, x_p} \varphi_0)(\overline{x}(x_p)) \quad (6.22)$$

De même on montre :

$$(H_{x_p, x_{p-1}} \varphi_{p-2})(\overline{x_{p-1}}(x_p), x_p, \dots, x_n) = (H_{x_p, x_{p-1}} \varphi_0)(\overline{x}(x_p)) \quad (6.23)$$

A l'aide des formules (6.21), (6.22) et (6.23), la formule (6.16) donne (6.18)

- Les équations (6.17) et (6.18) donne au point (x_p^0, \dots, x_n^0)

$$\nabla_{x_p} V_p(x_p^0, x_{p+1}^0) = M_p(x_1^0, \dots, x_n^0) \quad \text{inversible} \quad (6.24)$$

et

$$V_p(x_p^0, x_{p+1}^0) = 0 \quad (6.25)$$

Ces deux équations nous permettent d'appliquer le théorème des fonctions implicites à la fonction V_p . Ceci défini alors x_p comme fonction implicite de x_{p+1} . Et par conséquent, il existe U_p'' ouvert de X_p contenant x_p^0 , U_{p+1}' ouvert de X_{p+1} contenant x_{p+1}^0 et une fonction

$$\begin{cases} \overline{x_p} : U_{p+1}' \longrightarrow U_p'' \\ x_{p+1} \longmapsto \overline{x_p}(x_{p+1}) \end{cases}$$

telle que

$$\begin{cases} \det \nabla_{x_p} V_p(x_p^0, x_{p+1}^0) \neq 0 \\ V_p(x_p^0, x_{p+1}^0) = \vec{0} \\ (x_p, x_{p+1}) \in U_p'' \times U_{p+1}' \\ V_p(x_p, x_{p+1}) = \vec{0} \end{cases} \iff \begin{cases} x_p = \overline{x_p}(x_{p+1}) \quad \forall x_{p+1} \in U_{p+1}' \\ x_p^0 = \overline{x_p}(x_{p+1}^0) \\ V_p(\overline{x_p}(x_{p+1}), x_{p+1}) = \vec{0} \\ \det \nabla_{x_p} V_p(\overline{x_p}(x_{p+1}), x_{p+1}) \neq 0 \end{cases}$$

On a donc

pour tous $x_{p+1} \in U_{p+1}'$

$$\text{Hess}_{x_p} \varphi_{p-1}(\overline{x_p}(x_{p+1}), x_{p+1}, \dots, x_n) = M_p(\overline{x}(x_{p+1})) \quad \text{inversible} \quad (6.26)$$

et

$$\nabla_{x_p} \varphi_{p-1}(\overline{x_p}(x_{p+1}), x_{p+1}, \dots, x_n) = 0 \quad (6.27)$$

On note $U_p = U_p' \cap U_p''$

Preuve du 2. Montrons tout d'abord que

$$\det \text{Hess}_{(x_1, \dots, x_n)} \varphi(x_1^0, \dots, x_n^0) = \prod_{p=1}^n \det M_p(x_1^0, \dots, x_n^0)$$

Pour cela, on note pour $p < n$

$$B_p = \begin{bmatrix} I_{d_1} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & I_{d_p} & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & K & I_{d_{p+1}} & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & I_{d_n} \end{bmatrix} (x_1^0, \dots, x_n^0)$$

avec $K = - (H_{x_p, x_{p+1}} \varphi) [H_{x_p, x_p} \varphi]^{-1}$

On a alors

$$\begin{aligned} & B_{n-1} \cdots B_1 \text{Hess}_{(x_1, \dots, x_n)} \varphi(x_1^0, \dots, x_n^0) \\ &= \\ & \begin{pmatrix} M_1 & C_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & C_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & M_n \end{pmatrix} (x_1^0, \dots, x_n^0) \end{aligned}$$

avec pour tout $p < n$, $C_p = H_{x_{p+1}, x_p} \varphi$.

Or

$$\det (B_{n-1} \cdots B_1 \text{Hess}_{(x_1, \dots, x_n)} \varphi(x_1^0, \dots, x_n^0)) = \det \text{Hess}_{(x_1, \dots, x_n)} \varphi(x_1^0, \dots, x_n^0)$$

Ce qui achève la preuve du 2.

Par hypothèse nous avons $\forall p < n \quad \det M_p(x_1^0, \dots, x_n^0) \neq 0$ ce qui donne

$$\det \text{Hess}_{(x_1, \dots, x_n)} \varphi(x_1^0, \dots, x_n^0) \neq 0 \implies \det M_n(x_1^0, \dots, x_n^0) \neq 0$$

Preuve du 3. Nous avons vu que $\text{Hess}_{x_1} \varphi(\bar{x}_1(x_2), \dots, x_n)$ est non dégénéré. Ceci nous permet d'appliquer le théorème de la phase stationnaire à la variable x_1 nous obtenons

$$\begin{aligned} & \int_{X_1} \cdots \int_{X_n} e^{ik\varphi(x_1, \dots, x_n)} u(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \\ &= \\ & \sum_{\nu_1=0}^{N_1-1} \left[k^{-\nu_1 - \frac{d_1}{2}} \int_{X_2} \cdots \int_{X_n} (A_{2\nu_1}^1(D_{x_1})u)(\bar{x}_1(x_2), x_2, \dots, x_n) e^{ik\varphi(\bar{x}_1(x_2), \dots, x_n)} dx_2 \cdots dx_n \right] \\ & \quad + O(k^{-N_1 - \frac{d_1}{2}}) \end{aligned}$$

En utilisant les hypothèses de non dégénérescence des Hessiens nous pouvons appliquer le théorème de la phase stationnaire successivement aux variables x_2, \dots, x_n nous trouvons

$$\begin{aligned} & \int_{X_1} \cdots \int_{X_n} e^{ik\varphi(x_1, \dots, x_n)} u(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \\ &= \\ & \left[\sum_{\nu=0}^{N_1-1} \cdots \sum_{\nu_n=0}^{N_n-1} k^{-\sum_{j=1}^n \nu_j - \frac{1}{2} d_j} \right. \\ & \left. A_{2\nu_n}^n(D_{x_n}) \circ \cdots \circ A_{2\nu_1}^1(D_{x_1}) u(\bar{x}_1(\cdots \bar{x}_{n-1}(x_n) \cdots), \dots, \bar{x}_{n-1}(x_n), x_n)_{x_n^0} \right] e^{ik\varphi(x_1^0, \dots, x_n^0)} \\ & \quad + \\ & \quad \sum_{j=1}^n O\left(k^{-N_j - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^j d_p}\right) \end{aligned}$$

Choisissons pour $i = 1$ à $n - 1$

$$N_i = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2} \sum_{j=i+1}^n d_j & \text{si } \sum_{j=i+1}^n d_j \text{ pair} \\ E\left(1 + \frac{1}{2} \sum_{j=i+1}^n d_j\right) + 1 & \text{si } \sum_{j=i+1}^n d_j \text{ impair} \end{cases}$$

et $N_n = 1$. Alors

$$\begin{aligned}
& \int_{X_1} \cdots \int_{X_n} e^{ik\varphi(x_1, \dots, x_n)} u(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \\
&= \\
& \left[\sum_{\nu=0}^{N_1-1} \cdots \sum_{\nu_{n-1}=0}^{N_{n-1}-1} k^{-\sum_{j=1}^n \nu_j - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n d_j} \right. \\
& A_0^n(D_{x_n}) \circ \cdots \circ A_{2\nu_1}^n(D_{x_1}) u(\overline{x_1}(\cdots \overline{x_{n-1}}(x_n) \cdots), \dots, \overline{x_{n-1}}(x_n), x_n)_{x_n^0}] e^{ik\varphi(x_1^0, \dots, x_n^0)} \\
&+ \\
& \sum_{j=1}^n O\left(k^{-N_j - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^j d_p}\right) \\
&= \\
& \left[k^{-\frac{1}{2} \sum_{p=1}^n d_p} A_0^n(D_{x_n}) \circ \cdots \circ A_0^n(D_{x_1}) u(\overline{x_1}(\cdots \overline{x_{n-1}}(x_n) \cdots), \dots, \overline{x_{n-1}}(x_n), x_n)_{x_n^0} \right] \\
& \quad \times e^{ik\varphi(x_1^0, \dots, x_n^0)} \\
&+ \\
& O\left(k^{-1 - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n d_p}\right) \\
&= \\
& \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{\sum_{p=1}^n d_p} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}(\sum_{j=1}^n \text{sgn } M_i(x_1^0, \dots, x_n^0))}}{\prod_{j=1}^n |\det M_i(x_1^0, \dots, x_n^0)|^{\frac{1}{2}}} u(x_1^0, \dots, x_n^0) e^{ik\varphi(x_1^0, \dots, x_n^0)} + O\left(k^{-1 - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n d_p}\right)
\end{aligned}$$

C.Q.F.D.

6.2.2 Cas d'une amplitude C^∞ hors d'une sous-variété où elle s'annule

énoncés

Corollaire 6.2 Soient X un ouvert borné de \mathbb{R}^2 , a et φ deux fonctions définies sur X vérifiant :

(i) $a \in C^\infty(X)$ et $a|_{\partial X} = 0$,

(ii) $\varphi \in C^\infty(X)$ et $\nabla\varphi \neq 0$ sur X

Alors, pour $k \geq 1$,

$$\int_X a(x) e^{ik\varphi(x)} dx = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

Corollaire 6.3 Soient $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ où les X_j sont des ouverts bornés de \mathbb{R}^2 . Soient a et φ deux fonctions définies sur X à valeurs réelles vérifiant :

(i) $a \in C^\infty(X)$ et $a|_{\partial X_j} = 0 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$,

(ii) $\varphi \in C^\infty(X)$ et $\nabla\varphi \neq 0$ sur X

Alors, pour $k \geq 1$,

$$\int_X a(x)e^{ik\varphi(x)} dx = O\left(\frac{1}{k^{n+1}}\right)$$

Preuve

Démonstration du Corollaire 6.2 En remarquant que

$$\forall (u, v) \in X \quad \frac{\nabla\varphi(u, v)}{ik |\nabla\varphi(u, v)|^2} \cdot \nabla \left(e^{ik\varphi(u, v)} \right) = e^{ik\varphi(u, v)}$$

on peut écrire

$$I(k) = I_u(k) + I_v(k)$$

avec

$$I_u(k) = \int \int_X \frac{a(u, v)}{ik |\nabla\varphi(u, v)|^2} \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u, v) \frac{\partial}{\partial u} \left(e^{ik\varphi(u, v)} \right) du dv$$

$$I_v(k) = \int \int_X \frac{a(u, v)}{ik |\nabla\varphi(u, v)|^2} \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u, v) \frac{\partial}{\partial v} \left(e^{ik\varphi(u, v)} \right) du dv$$

Par symétrie le calcul de I_u est identique à celui de I_v .

Calculons $I_u(k)$. Pour cela effectuons tout d'abord une intégration par partie en la variable u . Comme $a|_{\partial X} = 0$ nous avons

$$I_u(k) = -\frac{1}{ik} \int \int_X \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{a(u, v) \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u, v)}{|\nabla\varphi(u, v)|^2} \right) e^{ik\varphi(u, v)} du dv$$

Une nouvelle intégration par partie en u et en v nous permet de conclure.

C.Q.F.D

Remarque : Comme les dérivées de a ne sont pas nulles sur le bord, on ne peut améliorer ce résultat.

Démonstration du Corollaire 6.3 Ce Corollaire se démontre de manière similaire au Corollaire 6.2 en utilisant conjointement des intégrations par partie et le théorème de la phase stationnaire.

C.Q.F.D.

Chapitre 7

Rappels sur l'approximation de l'optique géométrique

7.1 Approximation de l'optique géométrique pour l'équation d'Helmholtz

La théorie des opérateurs intégraux de Fourier donne, pour $k \rightarrow \infty$, la solution du problème (1.1) sous la forme

$$u(x; k) = k^{\frac{1}{2}} \sum_{\text{loc. finie}} \int_{\mathbb{R}} \alpha(x; k, \xi) e^{-ik\psi(x; \xi)} d\xi \quad (7.1)$$

où $\alpha(x; k, \xi) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{\alpha_j(x; \xi)}{k^j}$.

On obtient par application du théorème de la phase stationnaire non dégénérée

$$u(x; k) = \sum_{\text{loc. finie}} a(x; k) e^{-ik\varphi(x)} \quad (7.2)$$

où $\varphi(x) = \psi(x; \xi_0)$ avec $\nabla_{\xi} \psi(x; \xi_0) = 0$ et $\text{Hess}_{\xi} \psi(x; \xi_0)$ non singulière,

et $a(x; k) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{a_j(x)}{k^j}$.

La "Théorie Géométrique de la Diffraction" permet de construire une solution asymptotique, à $k^{-\infty}$ près, du problème (1.1). Celle-ci est donnée hors des caustiques (points de phase stationnaire dégénérée) par (7.3).

L'approximation de l'optique géométrique consiste à prendre le terme principal de ce développement et à le calculer le long des rayons de l'Optique Géométrique en dehors des points de

caustique. Cependant, cette théorie permet de raccorder ce terme aux points de la caustique par l'utilisation de l'indice de Maslov dans le cas où un point appartenant à la caustique et à un rayon est isolé sur ce rayon.

La plupart des résultats de ce chapitre proviennent de [3].

Remarque : Comme Ω est une réunion de compacts strictement convexes, il n'y a pas de caustiques hors de l'ombre portée des contours apparents. C'est pourquoi elles ne seront pas étudiées ici.

7.1.1 Position du problème

Posons le problème

$$(I) \begin{cases} \Delta v(x; k) + k^2 v(x; k) = 0 & \text{pour } x \in \Omega \\ v|_{\partial\Omega} = 0 \\ w(\sigma; k) = e^{-ik\varphi_\Sigma} \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{a_j(\sigma)}{k^j} & \text{pour } \sigma \in \Sigma \\ ru \text{ et } r^2 \left(\frac{\partial u}{\partial r} + ik u \right) \text{ bornés quand } r = |x| \rightarrow +\infty \\ v(x; k) = w(x; k) + u(x; k) & \text{pour } x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

Ici $w(x; k)$ vérifie l'équation d'Helmholtz dans \mathbb{R}^3 , $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(x) = \varphi_\Sigma\}$. On fait l'hypothèse sur Σ que

$$\Omega' \subset \{x = \sigma + tN(\sigma) \mid t \in \mathbb{R}_*^+, \sigma \in \Sigma \text{ et } N(\sigma) = \nabla\varphi(\sigma) \text{ normale extérieure à } \Sigma\}$$

Pour justifier la donnée de w uniquement sur Σ on a le résultat classique de l'optique géométrique suivant :

Proposition 7.1 *La donnée d'une surface d'onde Σ de $w(x; k)$ et la donnée de la valeur de l'amplitude sur cette surface suffisent pour en déterminer le terme principal dans tout l'espace, avec un reste en $O(\frac{1}{k})$.*

7.1.2 Equations de l'optique géométrique

L'approximation de l'optique géométrique pour ce problème consiste à chercher un développement asymptotique en $\frac{1}{k}$ de la solution $v(x; k)$ du problème (I):

$$v(x; k) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{a_j(x)}{k^j} e^{-ik\varphi(x)} \quad (7.3)$$

L'existence d'un tel développement est donnée par la théorie des opérateurs de Fourier intégraux. Ensuite, on approximera $v(x; k)$ par $a_0(x)e^{-ik\varphi(x)}$.

En appliquant l'opérateur $(\Delta + k^2)$ au développement (7.3), nous obtenons par un réarrangement en puissance de $\frac{1}{k}$:

$$\begin{aligned} & k^2(1 - |\nabla\varphi(x)|^2)a_0(x) \\ & + k [i \{2(\nabla\varphi(x), \nabla a_0(x)) + a_0(x)\Delta\varphi(x)\} + (1 - |\nabla\varphi(x)|^2)a_1(x)] \\ & + \sum_{j \in \mathbb{N}} k^j (i \{2(\nabla\varphi(x), \nabla a_{k+1}(x)) + a_{k+1}(x)\Delta\varphi(x)\} + \Delta a_k(x)) = 0 \end{aligned}$$

En annulant successivement les puissances de k nous avons

- l'équation eikonale

$$|\nabla\varphi(x)|^2 = 1 \quad (7.4)$$

- l'équation de transport pour a_0

$$(\nabla\varphi(x), \nabla a_0(x)) + \frac{1}{2}a_0(x)\Delta\varphi(x) = 0 \quad (7.5)$$

- l'équation de transport donnant a_k en fonction de a_{k-1}

$$(\nabla\varphi(x), \nabla a_k(x)) + \frac{1}{2}a_k(x)\Delta\varphi(x) = \frac{i}{2}\Delta a_{k-1}(x) \quad (7.6)$$

7.1.3 Résolution de l'équation eikonale dans \mathbb{R}^3

En dérivant (7.4) on obtient

$$\nabla(\nabla\varphi(x))\nabla\varphi(x) = 0 \quad (7.7)$$

Cette équation se résoud par la méthode des caractéristiques. Posons

$$X'(t) = \nabla\varphi(X(t))$$

nous avons alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\nabla\varphi(X(t))) &= \nabla(\nabla\varphi(X(t)))X'(t) \\ &= \nabla(\nabla\varphi(X(t)))\nabla\varphi(X(t)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\nabla\varphi(X(t)) = \nabla\varphi(X(0))$$

avec

$$X(t) = X(0) + t\nabla\varphi(X(0))$$

C'est à dire : $\nabla\varphi(X(t))$ est constant le long de chacune des droites d'équations $X(t) = X(0) + t\nabla\varphi(X(0))$.

Or par construction de Σ , nous avons

$$X(t) = \sigma + tN(\sigma)$$

avec $\sigma \in \Sigma$ et $N(\sigma) = \nabla\varphi(\sigma)$ normale à Σ en σ .

Nous venons donc de montrer le lemme suivant:

Lemme 7.1 *Les courbes caractéristiques sont les rayons de l'optique géométriques.*

la dérivation de $\varphi(X(t))$ par rapport à t donne :

$$\frac{d}{dt}(\varphi(X(t))) = \nabla\varphi(X(t))X'(t) = |\nabla\varphi(X(t))|^2 = 1$$

On en déduit alors

$$\varphi(\sigma + tN(\sigma)) = t + \varphi_\Sigma$$

C'est à dire

Lemme 7.2 *La phase varie linéairement le long d'un rayon de l'optique géométrique.*

Les calculs précédents sont valables uniquement si l'on sait, pour $x \in \mathbb{R}^3$ donné, trouver le couple $(\sigma, t) \in \Sigma \times \mathbb{R}$ tel que $x = \sigma + tN(\sigma)$, c'est à dire si l'on sait inverser l'application qui à (σ, t) associe $x = \sigma + tN(\sigma)$. Cette application n'est inversible qu'avant la caustique.

7.1.4 Résolution de l'équation de transport pour a_0 dans \mathbb{R}^3

On veut résoudre

$$\begin{cases} (\nabla\varphi(x), \nabla a_0(x)) + \frac{1}{2}a_0(x)\Delta\varphi(x) = 0 \\ a_0 \text{ donné sur } \Sigma \end{cases}$$

En fait, il suffit de résoudre cette équation le long d'un rayon $\sigma + tN(\sigma)$. L'équation de transport pour a_0 s'écrit le long d'un rayon $\sigma + tN(\sigma)$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(a_0(\sigma + tN(\sigma)) + \frac{1}{2}\Delta\varphi(\sigma + tN(\sigma))a_0(\sigma + tN(\sigma))) = 0 \\ a_0(\sigma) \text{ donné} \end{cases} \quad (7.8)$$

Pour résoudre cette équation, il faut connaître $\Delta\varphi(\sigma + tN(\sigma))$.

Notation 7.1 *On note*

$$A_0(\sigma) = (\text{Hess } \varphi)(\sigma)$$

et

$$A_t(\sigma) = (\text{Hess } \varphi)(\sigma + tN(\sigma))$$

Lemme 7.3 *Si $A_0(\sigma) \in \mathcal{S}_t$ alors*

$$A_t(\sigma) = A_0(\sigma)(I + tA_0(\sigma))^{-1} \quad (7.9)$$

Preuve

Le développement limité à l'ordre 1 de $\nabla\varphi$ au voisinage $\mathcal{V}(\sigma)$ d'un point $\sigma \in \Sigma$ s'écrit:

$\forall x \in \mathcal{V}(\sigma)$

$$\nabla\varphi(x) = \nabla\varphi(\sigma) + A_0(\sigma)(x - \sigma) + O(|x - \sigma|) \quad (7.10)$$

En remplaçant $\nabla\varphi(x)$ dans l'équation eikonale (7.4) par (7.10) on obtient pour tout x appartenant à $\mathcal{V}(\sigma)$:

$$\begin{aligned} 1 &= |\nabla\varphi(\sigma) + A_0(\sigma)(x - \sigma) + O(|x - \sigma|)|^2 \\ &= |\nabla\varphi(\sigma)|^2 + 2(A_0(\sigma)(x - \sigma), \nabla\varphi(\sigma)) + O(|x - \sigma|^2) \\ &= 1 + 2(A_0(\sigma)(x - \sigma), N(\sigma)) + O(|x - \sigma|^2) \end{aligned}$$

Ce qui donne, par symétrie de $A_0(\sigma)$

$$\forall x \in \mathcal{V} \quad (A_0(\sigma)N(\sigma), (x - \sigma)) = 0$$

et donc

$$A_0(\sigma)N(\sigma) = 0 \quad (7.11)$$

On établit maintenant une formule identique pour la matrice $A_t(\sigma)$.

Soit x un point d'un rayon issu de Σ , un tel point s'écrit

$$x = \sigma + tN(\sigma) \text{ avec } \sigma \in \Sigma$$

Nous supposons que x n'appartient pas à la caustique (i.e. $I + tA_0(\sigma)$ inversible). Alors il existe un voisinage $\mathcal{V}(x)$ tel que

$$\forall x' \in \mathcal{V}(x) \exists \sigma' \in \mathcal{V}(\sigma) \text{ et } t' \text{ dans un voisinage de } t \text{ vérifiant } x' = \sigma' + t'N(\sigma')$$

Le développement limité à l'ordre 1 de $\nabla\varphi$ au voisinage du point x s'écrit:

$$\nabla\varphi(x') = \nabla\varphi(x) + A_t(\sigma)(x' - x) + O(|x - \sigma|) \quad (7.12)$$

En remplaçant $\nabla\varphi(x')$ dans l'équation eikonal (7.3) par (7.12) on obtient :

$$\dot{A}_t(\sigma)N(\sigma) = 0 \quad (7.13)$$

On va établir la relation (7.9) donnant $A_t(\sigma)$ en fonction de $A_0(\sigma)$.

Pour celà, on écrit

$$\begin{aligned} x' - x &= \sigma' + t'N(\sigma') - \sigma - tN(\sigma) \\ &= \sigma' - \sigma + (t' - t)N(\sigma) + t'(N(\sigma') - N(\sigma)) \end{aligned}$$

or d'après (7.10)

$$N(\sigma') - N(\sigma) = A_0(\sigma)(\sigma' - \sigma) + O(|\sigma' - \sigma|) \quad (7.14)$$

ce qui donne

$$x' - x = \sigma' - \sigma + (t' - t)N(\sigma) + t'A_0(\sigma)(\sigma' - \sigma) + O(|\sigma' - \sigma|) \quad (7.15)$$

En remplaçant $x' - x$ par (7.15) dans (7.12) et en utilisant (7.14) on a

$$N(\sigma') = N(\sigma) + A_t(\sigma)(\sigma' - \sigma) + t'A_t(\sigma)A_0(\sigma)(\sigma' - \sigma) + O(|\sigma' - \sigma| + |t' - t|)$$

En utilisant (7.14) on trouve

$$A_0(\sigma)(\sigma' - \sigma) + O(|\sigma' - \sigma|) = A_t(\sigma)(\sigma' - \sigma) + t'A_t(\sigma)A_0(\sigma)(\sigma' - \sigma) + O(|\sigma' - \sigma| + |t' - t|)$$

C'est à dire

$$\begin{aligned} A_0(\sigma) &= A_t(\sigma) + tA_t(\sigma)A_0(\sigma) \\ &= A_t(\sigma)(I + tA_0(\sigma)) \end{aligned}$$

Or, par hypothèse, $A_0(\sigma) \in \mathcal{S}_t$. Nous pouvons donc inverser $(I + tA_0(\sigma))$.

C.Q.F.D.

Lemme 7.4 Si $A_0(\sigma) \in \mathcal{S}_t$ alors

$$a_0(\sigma + tN(\sigma)) = \frac{a_0(\sigma)}{\sqrt{\det(I + tA_0(\sigma))}} \quad (7.16)$$

Preuve :

Par définition de $A_t(\sigma)$

$$\Delta\varphi(\sigma + tN(\sigma)) = \text{Tr } A_t(\sigma)$$

On peut alors résoudre l'équation (7.8):

$$\begin{aligned}
a_0(\sigma + tN(\sigma)) &= a_0(\sigma) e^{-\frac{1}{2} \int_0^t \text{Tr } A_\tau(\sigma) d\tau} \\
&= a_0(\sigma) e^{-\frac{1}{2} \int_0^t \text{Tr} [A_0(\sigma)(I + \tau A_0(\sigma))^{-1}] d\tau} \\
&= a_0(\sigma) e^{-\frac{1}{2} [\log \det(I + \tau A_0(\sigma))]_0^t} \\
&= \frac{a_0(\sigma)}{\sqrt{\det(I + tA_0(\sigma))}}
\end{aligned}$$

C.Q.F.D.

7.1.5 Calcul d'une réflexion

Soit $\sigma_0 \in \partial\Omega$ un point d'un rayon issu de Σ hors de la caustique. Connaissant l'onde incidente sur Σ , à l'aide des résultats obtenus précédemment, nous la connaissons aussi au point σ_0 .

Nous voulons alors calculer l'onde réfléchie au point σ_0 . D'après les calculs précédents pour la déterminer tout au long du rayon réfléchi, il suffit de la connaître au point de réflexion. Il est donc nécessaire de calculer la phase φ_R , la direction $\nabla\varphi_R$ et la matrice Hess φ_R de l'onde réfléchie au point σ_0 . Ces calculs s'effectueront en fonctions de φ_I , la direction $\nabla\varphi_I$ et la matrice Hess φ_I de l'onde incidente au point σ_0 et de la géométrie de l'obstacle.

Supposons la géométrie de l'obstacle Ω donnée à l'ordre 2 en tout point de $\partial\Omega$. C'est à dire, sont donnés en tout point de $\partial\Omega$ le repère principal de courbure et les rayons de courbures.

Notation 7.2 • On note pour $\sigma_0 \in \partial\Omega$, hors de la caustique :

$\mathfrak{R} = (\sigma_0; u, v, n)$ le repère principal de courbure de $\partial\Omega$ au point σ_0 ,

R_u et R_v les rayons de courbures de $\partial\Omega$ au point σ_0 dans les directions respectives u et v ,

$B(\sigma_0) \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ la matrice de courbure de $\partial\Omega$ en σ_0

• On note pour l'onde incidente:

$a_I(\sigma_0)$ son amplitude au point σ_0 ,

$\varphi_I(\sigma_0)$ sa phase au point σ_0 ,

$\xi_I = \nabla\varphi_I(\sigma_0)$ la direction du rayon incident au point σ_0 ,

$A_I(\sigma_0) = (\nabla(\nabla\varphi_I))(\sigma_0)$ la matrice de courbure du front d'onde incident en σ_0

- On cherche à déterminer l'onde réfléchie:
 - $a_R(\sigma_0)$ son amplitude au point σ_0 ,
 - $\varphi_R(\sigma_0)$ sa phase au point σ_0 ,
 - $\xi_R = \nabla\varphi_R(\sigma_0)$ la direction du rayon réfléchi au point σ_0 ,
 - $A_R(\sigma_0) = (\nabla(\nabla\varphi_R))(\sigma_0)$ la matrice de courbure du front d'onde réfléchi en σ_0

Il existe un voisinage $\mathcal{V}(\sigma_0)$ de σ_0 dans $\partial\Omega$, il existe un voisinage $\mathcal{V}(0,0)$ de $(0,0)$ dans \mathbb{R}^2 tels que

$\forall \sigma \in \mathcal{V}(\sigma_0) \exists (u, v) \in \mathcal{V}(0,0)$ vérifiant

$$\sigma - \sigma_0 = \sigma(u, v) - \sigma_0 = \begin{pmatrix} u \\ v \\ g(u, v) \end{pmatrix}_{\mathfrak{R}}$$

avec $g(u, v) = -\frac{u^2}{2R_u} - \frac{v^2}{2R_v} + o(u^2 + v^2)$

Lemme 7.5 Avec les notations précédentes,

$$\xi_R = \xi_I - 2(\xi_I, n)n \quad (7.17)$$

$$A_R(\sigma_0) = T_{B(\sigma_0, n(\sigma_0), \xi_I)}(A_I(\sigma_0)) \quad (7.18)$$

Preuve :

Pour démontrer ces résultats on utilise la condition de réflexion

$$v|_{\partial\Omega} = 0$$

En fait elle revient à prendre sur $\partial\Omega$ une amplitude réfléchie opposée à l'amplitude incidente et à raccorder les phases réfléchies et incidentes :

pour tout $\sigma \in \partial\Omega$

$$a_R(\sigma) = -a_I(\sigma) \quad (7.19)$$

et

$$\varphi_R(\sigma) = \varphi_I(\sigma) \quad (7.20)$$

Ecrivons les développements limités à l'ordre 1 des phases incidente et réfléchie.
pour tout $\sigma \in \mathcal{V}(\sigma_0)$

$$\varphi_I(\sigma) = \varphi_I(\sigma_0) + (\xi_I, \sigma - \sigma_0) + o(|\sigma_0 - \sigma|)$$

et

$$\varphi_R(\sigma) = \varphi_R(\sigma_0) + (\xi_R, \sigma - \sigma_0) + o(|\sigma_0 - \sigma|)$$

En raccordant les phases, on obtient

$$(\xi_I, \sigma - \sigma_0) = (\xi_R, \sigma - \sigma_0) + o(|\sigma_0 - \sigma|)$$

or nous avons

$$(n, \sigma(u, v) - \sigma_0) = g(u, v) = o(|\sigma_0 - \sigma|)$$

ce qui permet d'affirmer l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\xi_R = \xi_I + \lambda n$$

En prenant la norme de cette équation on obtient la valeur de λ

$$\lambda = -2(\xi_I, n)$$

Ce qui démontre la formule (7.17).

Nous allons maintenant donner les développements limités à l'ordre 1 du gradient de la phase incidente et du gradient de la phase réfléchi en $\sigma \in \partial\Omega$, c'est à dire de la direction du rayon incident et du rayon réfléchi passant en σ :

$\forall \sigma \in \mathcal{V}(\sigma_0)$

$$\nabla\varphi_I(\sigma) = \xi_I + A_I(\sigma_0)(\sigma - \sigma_0) + o(|\sigma_0 - \sigma|) \quad (7.21)$$

et

$$\nabla\varphi_R(\sigma) = \xi_R + A_R(\sigma_0)(\sigma - \sigma_0) + o(|\sigma_0 - \sigma|) \quad (7.22)$$

Calculons le développement limité à l'ordre 1 de la normale à $\partial\Omega$ au point $\sigma(u, v)$. Tout d'abord,

$$\begin{aligned} \frac{\partial\sigma(u, v)}{\partial u} \wedge \frac{\partial\sigma(u, v)}{\partial v} &= \begin{pmatrix} \frac{u}{R_u} \\ \frac{v}{R_v} \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathbb{R}} \\ &= n(\sigma_0) + B(\sigma_0)(\sigma(u, v) - \sigma_0) + O(u^2 + v^2) \end{aligned}$$

On obtient

$$n(\sigma(u, v)) = \frac{n(\sigma_0) + B(\sigma_0)(\sigma(u, v) - \sigma_0)}{\left(1 + \frac{u^2}{R_u^2} + \frac{v^2}{R_v^2}\right)^{\frac{1}{2}}} + O(u^2 + v^2)$$

or

$$\left(1 + \frac{u^2}{R_u^2} + \frac{v^2}{R_v^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + O(u^2 + v^2)$$

Ce qui donne

$$n(\sigma) = n(\sigma_0) + B(\sigma_0)(\sigma - \sigma_0) + o(|\sigma - \sigma_0|) \quad (7.23)$$

De façon similaire à la démonstration de la formule (7.17), nous trouvons pour tout $\sigma \in \mathcal{V}(\sigma_0)$

$$\nabla\varphi_R(\sigma) = \nabla\varphi_I(\sigma) - 2(\nabla\varphi_I(\sigma), n(\sigma))n(\sigma) \quad (7.24)$$

En utilisant les équations (7.21) et (7.23), l'équation précédente devient

$$\begin{aligned} \nabla\varphi_R(\sigma) &= \xi_I + A_I(\sigma_0)(\sigma - \sigma_0) \\ &\quad + 2(\xi_I + A_I(\sigma_0)(\sigma - \sigma_0), n + B(\sigma_0)(\sigma - \sigma_0)) (n + B(\sigma_0)(\sigma - \sigma_0)) + o(|\sigma - \sigma_0|) \\ &= \xi_I - 2(\xi_I, n)n + (A_I(\sigma_0) - 2(\xi_I, n)B(\sigma_0))(\sigma - \sigma_0) \\ &\quad - 2(\xi_I, B(\sigma_0)(\sigma - \sigma_0))n \\ &\quad - 2(A_I(\sigma_0)(\sigma - \sigma_0), n)n + o(|\sigma - \sigma_0|) \end{aligned}$$

Pour obtenir l'expression de $\nabla\varphi_R(x)$ pour tout x appartenant à un voisinage \mathcal{V}_0 de σ_0 dans \mathbb{R}^3 , à partir de son expression pour $\sigma \in \mathcal{V}(\sigma_0)$, il faut ajouter à cette expression un vecteur nul sur $\partial\Omega$. Ceci se traduit, au deuxième ordre près, par l'existence d'un vecteur C_1 constant tel que :

pour tout $x \in \mathcal{V}_0$

$$\begin{aligned} \nabla\varphi_R(x) &= \xi_I - 2(\xi_I, n)n + (A_I(\sigma_0) - 2(\xi_I, n)B(\sigma_0))(x - \sigma_0) \\ &\quad - 2(\xi_I, B(\sigma_0)(x - \sigma_0))n - 2(A_I(\sigma_0)(x - \sigma_0), n)n \\ &\quad + (x - \sigma_0, n)C_1 + o(|x - \sigma_0|) \end{aligned} \quad (7.25)$$

car si $x \in \mathcal{V}(\sigma_0)$ alors $(x - \sigma_0, n) = o(|x - \sigma_0|)$

On déduit, de la formule (7.23), l'existence d'un vecteur C_2 constant tel que :

pour tout $\forall x \in \mathcal{V}_0$

$$\nabla\varphi_R(x) = \xi_R + A_R(\sigma_0)(x - \sigma_0) + (x - \sigma_0, n)C_2 + o(|x - \sigma_0|) \quad (7.26)$$

Notons $C = C_1 - C_2$, on a :

$$\begin{aligned} A_R(\sigma_0)(x - \sigma_0) &= (A_I(\sigma_0) - 2(\xi_I, n)B(\sigma_0))(x - \sigma_0) \\ &\quad - 2(\xi_I, B(\sigma_0)(x - \sigma_0))n - 2(A_I(\sigma_0)(x - \sigma_0), n)n \\ &\quad + (x - \sigma_0, n)C + o(|x - \sigma_0|) \end{aligned}$$

Pour calculer C on utilise la propriété sur les matrices de courbures incidente et réfléchie :

$$A_I(\sigma_0)\xi_I = 0$$

et

$$A_R(\sigma_0)\xi_R = 0$$

Ce qui donne

$$A_I(\sigma_0)\xi_R - 2(\xi_I, n)B(\sigma_0)\xi_R - 2(\xi_I, B(\sigma_0)\xi_R)n - 2(A_I(\sigma_0)\xi_R, n)n + (\xi_R, n)C = 0$$

or on a établi les relations suivantes:

$$\xi_R = \xi_I - 2(\xi_I, n)n$$

$$B(\sigma_0)\xi_R = B(\sigma_0)\xi_I$$

$$\text{et } (\xi_R, n) = -(\xi_I, n)$$

et donc

$$C = 2 \left[2(A_I(\sigma_0)n, n) - \frac{(B(\sigma_0)\xi_I, \xi_I)}{(\xi_I, n)} \right] n - 2[A_I(\sigma_0)n + B(\sigma_0)\xi_I]$$

C.Q.F.D.

Ces résultats sont donnés dans [3]

7.2 Approximation de l'optique géométrique pour les équations de Maxwell

On cherche un développement asymptotique en $1/k$ de la solution $\mathbf{E}_R, \mathbf{H}_R$ pour le problème 1.11 sous la forme

$$\mathbf{E}_R(x; k) = e^{-ik\varphi(x)} \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{\mathbf{e}_j^R(x)}{k^j}$$

et

$$\mathbf{H}_R(x; k) = e^{-ik\varphi(x)} \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{\mathbf{h}_j^R(x)}{k^j}$$

$$\text{avec } \mathbf{e}_j^R = \begin{pmatrix} e_{j,1}^R \\ e_{j,2}^R \\ e_{j,3}^R \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{h}_j^R = \begin{pmatrix} h_{j,1}^R \\ h_{j,2}^R \\ h_{j,3}^R \end{pmatrix}$$

L'approximation de l'optique géométrique consiste à prendre le terme principal de ce développement. On le note $\mathbf{E}_{O.G.}(x; k)$ et $\mathbf{H}_{O.G.}(x; k)$

En appliquant l'opérateur $\Delta + k^2\mathbf{I}$ au développement on obtient

- l'équation eikonale

$$|\nabla\varphi(x)|^2 = 1$$

- les équations de transport pour \mathbf{e}_0^R

$$(\nabla\varphi(x), \nabla e_{0,j}^R(x)) + \frac{1}{2} e_{0,j}^R(x) \Delta\varphi(x) = 0$$

pour $j = 1$ à 3

- les équations de transport donnant \mathbf{e}_k^R en fonction de \mathbf{e}_{k-1}^R

$$(\nabla\varphi(x), \nabla e_{k,j}^R(x)) + \frac{1}{2} e_{k,j}^R(x) \Delta\varphi(x) = \frac{i}{2} \Delta e_{k-1,j}^R(x)$$

pour $j = 1$ à 3

La résolution de l'équation eikonale dans \mathbb{R}^3 ainsi que les résolutions des équations de transport pour $e_{0,j}^R$ ont été effectuée à la section précédente et nous obtenons :

Lemme 7.6 1. *Les courbes caractéristiques de l'équation eikonale dans \mathbb{R}^3 sont les rayons de l'Optique Géométrique.*

2. *La phase varie linéairement le long des rayons de l'Optique Géométrique.*

3. *Avec les notations du chapitre 2, la résolution des équations de transport pour \mathbf{e}_0^R donne:*

si $A_0(\sigma) \in \mathcal{S}_t$ alors

$$\mathbf{e}_0^R(\sigma + tN(\sigma)) = \frac{\mathbf{e}_0^R(\sigma)}{\sqrt{\det(I + tA_0(\sigma))}}$$

Le calcul d'une réflexion est en grande partie identique. Seul changement, la condition de réflexion est vectorielle :

$$\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}_R = -\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}_I \quad \text{pour } x \in \partial\Omega$$

Si on note

$\mathbf{e}_I(\sigma)$ l'amplitude vectorielle incidente au point de réflexion $\sigma \in \partial\Omega$

et

$\mathbf{e}_R(\sigma)$ l'amplitude vectorielle réfléchie au point de réflexion $\sigma \in \partial\Omega$

on obtient

$$(\mathbf{n}(\sigma) \wedge \mathbf{e}_R(\sigma))e^{-ik\varphi_R(\sigma)} = -(\mathbf{n}(\sigma) \wedge \mathbf{e}_I(\sigma))e^{-ik\varphi_I(\sigma)}$$

Ceci donne

$$\varphi_R(\sigma) = \varphi_I(\sigma)$$

et

$$(\mathbf{n}(\sigma) \wedge \mathbf{e}_R(\sigma)) = -(\mathbf{n}(\sigma) \wedge \mathbf{e}_I(\sigma))$$

Dans le repère principal de courbure de $\partial\Omega$ en σ , on obtient

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} e_R^u(\sigma) \\ e_R^v(\sigma) \\ e_R^n(\sigma) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} e_I^u(\sigma) \\ e_I^v(\sigma) \\ e_I^n(\sigma) \end{pmatrix}$$

c'est à dire

$$e_R^u(\sigma) = -e_I^u(\sigma) \text{ et } e_R^v(\sigma) = -e_I^v(\sigma)$$

De plus les conditions

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_R = 0 \text{ et } \operatorname{div} \mathbf{E}_I = 0$$

entraîne

$$\nabla\varphi_R(\sigma) \cdot e_R(\sigma) = 0 \text{ et } \nabla\varphi_I(\sigma) \cdot e_I(\sigma) = 0$$

ce qui donne

$$\begin{cases} \xi_I \cdot e_I(\sigma) & = 0 \\ (\xi_I - 2(\xi, \mathbf{n}(\sigma)) \mathbf{n}(\sigma)) \cdot e_R(\sigma) & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \xi_I^u \cdot e_I^u(\sigma) + \xi_I^v \cdot e_I^v(\sigma) + \xi_I^n \cdot e_I^n(\sigma) & = 0 \\ \xi_I^u \cdot e_R^u(\sigma) + \xi_I^v \cdot e_R^v(\sigma) - \xi_I^n \cdot e_R^n(\sigma) & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \xi_I^u \cdot e_I^u(\sigma) + \xi_I^v \cdot e_I^v(\sigma) + \xi_I^n \cdot e_I^n(\sigma) & = 0 \\ -\xi_I^u \cdot e_I^u(\sigma) - \xi_I^v \cdot e_I^v(\sigma) - \xi_I^n \cdot e_R^n(\sigma) & = 0 \end{cases}$$

et donc

$$e_R^n(\sigma) = e_I^n(\sigma)$$

On obtient donc, au point de réflexion σ

$$e_R(\sigma) = -(e_I(\sigma) - 2(\mathbf{n}(\sigma), e_I(\sigma)) \mathbf{n}(\sigma))$$

Remarque : Pour le champ \mathbf{H} on obtient :

$$h_R(\sigma) = h_I(\sigma) - 2(\mathbf{n}(\sigma), h_I(\sigma)) \mathbf{n}(\sigma)$$

L'approximation de l'optique géométrique pour les équations de Maxwell s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{O.G.}(x; k) &= \mathbf{e}_0^R(x) e^{-ik\varphi(x)} \\ &+ \frac{\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (-1)^n \sum_{\rho=(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \mathcal{R}_n(x)} \mathcal{G}(\mathbf{n}(\sigma_1), \dots, \mathbf{n}(\sigma_n)) (\mathbf{e}_0^R(\sigma_1)) e^{-ik\varphi^\rho(x) \frac{\pi}{2}}}{\prod_{j=1}^n \sqrt{\det(I + |\sigma_j - \sigma_{j+1}| M_j^\rho)}} \end{aligned} \quad (7.27)$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{O.G.}(x; k) &= \mathbf{h}_0^R(x) e^{-ik\varphi(x)} \\ &+ \frac{\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sum_{\rho=(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \mathcal{R}_n(x)} \mathcal{G}(\mathbf{n}(\sigma_1), \dots, \mathbf{n}(\sigma_n)) (\mathbf{h}_0^R(\sigma_0)) e^{-ik\varphi^\rho(x) \frac{\pi}{2}}}{\prod_{j=1}^n \sqrt{\det(I + |\sigma_j - \sigma_{j+1}| M_j^\rho)}} \end{aligned} \quad (7.28)$$

Chapitre 8

Rappels sur l'approximation de Kirchhoff

8.1 Représentations intégrales

Soit Θ un domaine borné de \mathbb{R}^3 . Nous associons à l'équation d'Helmholtz

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{sur } \Theta \text{ ou sur } \Theta^c$$

des conditions aux limites de type Neumann ou Dirichlet sur la surface $\Gamma = \partial\Theta$. Notons

$$X_S = \left\{ u \in H_{loc}^1(\overline{\Theta^c}) \mid ru \text{ et } r^2 \left(\frac{\partial u}{\partial r} + iku \right) \text{ borné quand } r = |x| \rightarrow +\infty \right\}$$

$$X_E = \left\{ u \in H_{loc}^1(\overline{\Theta^c}) \mid ru \text{ et } r^2 \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) \text{ borné quand } r = |x| \rightarrow +\infty \right\}$$

On a le théorème d'existence et d'unicité suivant :

Proposition 8.1 *Le problème de Dirichlet extérieur*

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{pour } x \in \Theta' \\ u|_{\Gamma} = g \end{cases} \quad (8.1)$$

et le problème de Neumann extérieur

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{pour } x \in \Theta' \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = f \end{cases} \quad (8.2)$$

admettent une unique solution dans X_S (ou X_E) si $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et $f \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$

Le théorème qui suit donne la formulation en équation intégrale :

Théorème 8.1 Soit u une fonction de \mathbb{R}^3 dans $C^\infty(\overline{\Theta}) \cap C^\infty(\overline{\Theta^c})$ tel que $u \in X_S$ et vérifie l'équation

$$\Delta u(x) + k^2 u(x) = 0 \quad x \in \Theta^c \quad \text{et} \quad x \in \Theta,$$

Notons u_i et u_e les limites intérieures et extérieures de la fonction u sur Γ et

$$[u] = u_i - u_e, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] = \frac{\partial u_i}{\partial n} - \frac{\partial u_e}{\partial n};$$

alors nous avons la représentation:

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial u}{\partial n}(y) \right] \frac{e^{-ik|x-y|}}{|x-y|} d\gamma(y) - \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} [u(y)] \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{e^{-ik|x-y|}}{|x-y|} \right) d\gamma(y) \quad (8.3)$$

pour tout $x \in \Theta \cup \Theta^c$, et

$$\begin{aligned} & \frac{u_i(x) + u_e(x)}{2} \\ & = \\ & \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial u}{\partial n}(y) \right] \frac{e^{-ik|x-y|}}{|x-y|} d\gamma(y) - \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} [u(y)] \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{e^{-ik|x-y|}}{|x-y|} \right) d\gamma(y) \end{aligned}$$

pour tout $x \in \Gamma$

Le théorème suivant est un théorème d'existence et d'unicité à sauts donnés.

Proposition 8.2 Le problème de transmission suivant:

déterminer $u \in H^1(\Theta) \times X_S$ (resp. $u \in H^1(\Theta) \times X_E$) solution de :

$$\begin{cases} (i) & \Delta u + k^2 u = 0 \\ (ii) & [u] = u_i|_{\Gamma} - u_e|_{\Gamma} = f \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \text{ donné,} \\ (iii) & \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] = \frac{\partial u_i}{\partial n}|_{\Gamma} - \frac{\partial u_e}{\partial n}|_{\Gamma} = g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \text{ donné,} \end{cases} \quad (8.4)$$

admet une unique solution donnée par

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} g(y) \frac{e^{-ik|x-y|}}{|x-y|} d\gamma(y) - \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} f(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{e^{-ik|x-y|}}{|x-y|} \right) d\gamma(y) \quad (8.5)$$

(resp.

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} g(y) \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} d\gamma(y) - \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} f(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \right) d\gamma(y) \quad (8.6)$$

).

Les dérivées normales à la surface de l'obstacle de la solution de l'équation d'Helmholtz sont l'objet du

Théorème 8.2 Soit p une fonction $p \in C(\Gamma)$. La fonction

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} p(y) \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} d\gamma(y) \quad (8.7)$$

est appelée potentiel de simple couche de densité p . u est alors solution de l'équation de Helmholtz et est analytique dans $\mathbb{R}^3 - \Gamma$. Nous avons de plus

$$\frac{\partial u_e}{\partial n}(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} p(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \right) d\gamma(y) - \frac{1}{2} p(x), \quad x \in \Gamma \quad (8.8)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial n}(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} p(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \right) d\gamma(y) + \frac{1}{2} p(x), \quad x \in \Gamma \quad (8.9)$$

Pour une démonstration de ces résultats se rapporter à [7], [8] et [2].

8.2 Approximation de Kirchhoff pour l'équation d'Helmholtz

L'approximation de Kirchhoff (ou de l'optique physique) est une méthode de résolution de l'équation d'Helmholtz à haute fréquence basée sur les représentations intégrales données précédemment.

Elle consiste, après prolongement du champ diffracté par l'opposé du champ incident dans l'obstacle, à approcher l'inconnu de l'équation intégrale ; c'est à dire la dérivée normale extérieure à l'obstacle du champ diffracté.

Notation 8.1 On note \tilde{u} le prolongé de u (solution du problème (8.1)) par $-w$ dans Ω' . \tilde{u} vérifie alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \tilde{u}(x; k) + k^2 \tilde{u}(x; k) = 0 \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^3 \\ [\tilde{u}](x; k) = 0 \quad \text{pour } x \in \partial\Omega \\ \left[\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} \right](x; k) = -\frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial n}(-w(x; k)) \quad \text{pour } x \in \partial\Omega \\ r\tilde{u} \text{ et } r^2 \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + ik\tilde{u} \right) \quad \text{bornés quand } r = |x| \rightarrow +\infty \end{array} \right.$$

où $[]$ note le saut.

Théorème 8.1 (Taylor[9]) Si Ω' est strictement convexe et $w(x; k) = e^{-ik\xi \cdot x}$ avec $|\xi| = 1$ alors

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\sigma) = K(\sigma; k)e^{-ik\xi \cdot \sigma} + O(k^{-\infty}), \quad \text{pour } \sigma \in \partial\Omega$$

avec

$$|K(\sigma; k) + ik|\xi \cdot n(\sigma)| \leq Ck^0$$

localement uniformément en dehors des contours apparents

Remarque 8.1 (Melrose-Taylor[6]) Sans les hypothèses sur les contours apparents, on a

$$|K(\sigma; k) + ik|\xi \cdot n(\sigma)| \leq Ck^{\frac{2}{3}}, \quad \text{pour } \sigma \in \partial\Omega$$

Le théorème de la phase stationnaire permet d'obtenir :

Corollaire 8.1 (Melrose-Taylor[6]) On pose

$$\bar{u}(x; k) = \int_{\partial\Omega} ik(|\xi \cdot n(\sigma)| - \xi \cdot n(\sigma)) e^{-ik\xi \cdot \sigma} \frac{e^{-ik|x-\sigma|}}{4\pi|x-\sigma|} d\sigma$$

Si Ω est un compact strictement convexe alors pour $k \rightarrow \infty$ et pour x n'appartenant pas à l'ombre portée des contours apparents, on obtient :

$$u(x; k) - \bar{u}(x; k) = O\left(\frac{1}{k}\right)$$

où u est la solution du problème (1.1), localement uniformément dans le complémentaire de l'ombre portée des contours apparents.

Pour étudier ces résultats se reporter à [9]

8.3 Approximation de Kirchhoff pour les équations de Maxwell

L'approximation de Kirchhoff est basée sur la représentation intégrale de la solution du problème (1.8-1.9). Cette représentation intégrale est donnée par

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_R(x; k) &= -\frac{1}{4ik\pi} \nabla_x \int_{\partial\Omega} \frac{e^{-ik|x-\sigma|}}{|x-\sigma|} \operatorname{div}_\sigma^S \mathbf{J}(\sigma) d\gamma(\sigma) \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} \frac{e^{-ik|x-\sigma|}}{|x-\sigma|} \mathbf{J}(\sigma) d\gamma(\sigma) \end{aligned} \quad (8.10)$$

Cette formule est appelée formule de Stratton-Chu.

L'approximation haute fréquence classique de Kirchhoff consiste à prendre

$$\mathbf{J}(\sigma) \approx \tilde{\mathbf{J}}(\sigma) = \begin{cases} 2 \mathbf{n}(\sigma) \wedge \mathbf{H}_I(\sigma) & \text{si } \xi \cdot \mathbf{n}(\sigma) < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (8.11)$$

où $\sigma \in \partial\Omega$ et à approcher le champ électrique diffracté par

$$-\frac{ik}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left(\tilde{\mathbf{J}}(\sigma) - \left(\frac{x-\sigma}{|x-\sigma|} \cdot \tilde{\mathbf{J}}(\sigma) \right) \frac{x-\sigma}{|x-\sigma|} \right) \frac{e^{-ik|x-\sigma|}}{|x-\sigma|} d\gamma(\sigma) \quad (8.12)$$

et le champ magnétique diffracté par

$$-\frac{ik}{4\pi} \int_{\partial\Omega} \left(\frac{x-\sigma}{|x-\sigma|} \wedge \tilde{\mathbf{J}}(\sigma) \right) \frac{x-\sigma}{|x-\sigma|} \frac{e^{-ik|x-\sigma|}}{|x-\sigma|} d\gamma(\sigma) \quad (8.13)$$

Ces résultats sont détaillés dans [1]

Bibliographie

- [1] A.Bendali. *Approximation par éléments finis de surface de problème de diffraction des ondes électromagnétiques*. Thèse, 1984.
- [2] Colton D. and Kress R. *Integral equation methods in scattering theory*. A Volume In Pure And Applied Mathematics. A Wiley-Interscience Publication, 1983.
- [3] M.Balabane et C.Bardos. *Equation des ondes : solutions asymptotiques et singularités*. Compte Rendus INRIA de la session électromagnétisme, 1989.
- [4] Grigis A. et Sjostrand J. *Introduction A L'Analyse Microlocale Des Equations Aux Dérivées Partielles*. Orsay Publications Universitaires Scientifiques, 1991.
- [5] L. Hormander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*. Springer-Verlag, 1983.
- [6] R.B. Melrose and M.E. Taylor. Near peak scattering and the corrected kirchoff approximation for a convex obstacle. *Adv. in Math.*, 55(3):242, 1985.
- [7] J.C. Nedelec. Notions sur les équations intégrales de la physique, théorie et approximation. Technical report, Ecole Polytechnique, 1978.
- [8] J.C. Nedelec. *Equations intégrales et approximation*. Cours de D.E.A. d'analyse numérique de l'université Paris 6, 1991.
- [9] Michael E. Taylor. *Pseudodifferential Operators*. Princeton University Press, 1981.



Liste des Figures

5.1	Représentation de $ \tilde{u}_2(X; k\xi) e^{\nu\varphi}$	50
5.2	$ \tilde{u}_1^\rho(X; k\xi) e^{\nu\varphi}$ où $\rho = (\sigma_1) \in \mathcal{C}_1(X)$ avec $\sigma_1 \in \partial S_1$	51
5.3	$ v_1^\nu(X; k\xi) e^{\nu\varphi}$ où $\nu = (\sigma_1) \in \mathcal{R}_1(X)$ avec $\sigma_1 \in \partial S_1$	51
5.4	Superposition des figures 5.2 et 5.3	52
5.5	$ \tilde{u}_1^\rho(X; k\xi) - v_1^\nu(X; k\xi) e^{\nu\varphi}$	52
5.6	$ \tilde{u}_2^\rho(X; k\xi) e^{\nu\varphi}$ où $\rho = (\sigma_1, \sigma_2) \in \mathcal{C}_2(X)$ avec $\sigma_1 \in \partial S_1, \sigma_2 \in \partial S_2$	53
5.7	$ v_2^\nu(X; k\xi) e^{\nu\varphi}$ où $\nu = (\sigma_1, \sigma_2) \in \mathcal{R}_2(X)$ avec $\sigma_1 \in \partial S_1, \sigma_2 \in \partial S_2$	53
5.8	Superposition des figures 5.6 et 5.7	54
5.9	$ \tilde{u}_2^\rho(X; k\xi) - v_2^\nu(X; k\xi) e^{\nu\varphi}$	54
5.10	$ \tilde{u}_1^{\rho_1}(X; k\xi) + \tilde{u}_2^{\rho_2}(X; k\xi) e^{\nu\varphi}$	55
5.11	Représentation de la fonction cut-off $f(x)$	57
5.12	Erreur relative avec méthode des rectangles et $k = 100$	58
5.13	Erreur relative avec méthode de Simpson et $k = 100$	58
5.14	Erreur relative avec méthode des rectangles et $k = 1000$	59
5.15	Erreur relative avec méthode de Simpson et $k = 1000$	59
5.16	Erreur relative avec méthode des rectangles et $k = 10000$	60
5.17	Erreur relative avec méthode de Simpson et $k = 10000$	60
5.18	Erreur relative sans cut-off	61
5.19	Erreur relative (méthode des rectangles) sur $]a_A^k, b_A^k[$ et $k = 100$	62
5.20	Erreur relative (méthode de Simpson) sur $]a_A^k, b_A^k[$ et $k = 100$	63
5.21	Erreur relative (méthode des rectangles) sur $]a_A^k, b_A^k[$ et $k = 1000$	63
5.22	Erreur relative (méthode de Simpson) sur $]a_A^k, b_A^k[$ et $k = 1000$	64
5.23	Erreur relative (méthode des rectangles) sur $]a_A^k, b_A^k[$ et $k = 10000$	64
5.24	Erreur relative (méthode de Simpson) sur $]a_A^k, b_A^k[$ et $k = 10000$	65
5.25	Méthode d'ordre 2	66

5.26	Méthode d'ordre 3	67
5.27	Erreur relative - Méthode d'ordre 2 - $k = 100$	67
5.28	Erreur relative - Méthode d'ordre 3 - $k = 100$	68
5.29	Erreur relative - Méthode d'ordre 2 - $k = 1000$	68
5.30	Erreur relative - Méthode d'ordre 3 - $k = 1000$	69
5.31	Erreur relative - Méthode d'ordre 2 - $k = 10000$	69
5.32	Erreur relative - Méthode d'ordre 3 - $k = 10000$	70
5.33	$ \overline{u}_1^\rho(X; k\xi) e^{2\nu\rho}$ où $\rho = (\sigma_1) \in \mathcal{C}_l(X)$, $\sigma_1 \in \partial S_1$	71
5.34	$ u_1^\rho(X; k\xi) e^{2\nu\rho}$ où $\rho = (\sigma_1) \in \mathcal{C}_l(X)$, $\sigma_1 \in \partial S_1$	72
5.35	Superposition des figures 5.33 et 5.34	72
5.36	$ \overline{u}_2^\rho(X; k\xi) e^{2\nu\rho}$ où $\rho = (\sigma_1, \sigma_2) \in \mathcal{C}_2(X)$, $\sigma_1 \in \partial S_1$ et $\sigma_2 \in \partial S_2$	73
5.37	$ u_2^\rho(X; k\xi) e^{2\nu\rho}$ où $\rho = (\sigma_1, \sigma_2) \in \mathcal{C}_2(X)$, $\sigma_1 \in \partial S_1$ et $\sigma_2 \in \partial S_2$	73
5.38	Superposition des figures 5.36 et 5.37	74
5.39	$ \overline{u}_3^\rho(X; k\xi) e^{2\nu\rho}$ où $\rho = (\sigma_1, \dots, \sigma_3) \in \mathcal{C}_3(X)$, $\sigma_1, \sigma_3 \in \partial S_1$ et $\sigma_2 \in \partial S_2$	74
5.40	$ u_3^\rho(X; k\xi) e^{2\nu\rho}$ où $\rho = (\sigma_1, \dots, \sigma_3) \in \mathcal{C}_3(X)$, $\sigma_1, \sigma_3 \in \partial S_1$ et $\sigma_2 \in \partial S_2$	75
5.41	Superposition des figures 5.39 et 5.40	75