Polynôme de reconstruction de type WENO *

Cuvelier F.

22 juin 2012

Table des matières

Voir [Shu97].

1 Notations

Soient a et b deux réels, $a < b$ et N_x un entier positif. On pose $\Delta x = (b-a)/N_x$ et

$$x_{i+1/2} = a + i\Delta x, \ \forall i \in [\![0, N_x]\!].$$

On note $x_i = \frac{x_{i-1/2}+x_{i+1/2}}{2}$ le point milieux de l'intervalle $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$. on a alors

$$x_{1/2} = a < x_1 < x_{3/2} < \ldots < x_{i-1/2} < x_i < x_{i+1/2} < \ldots < x_{N_x+1/2} = b.$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on note $S_{k,i}(r)$ un stencil à k points consécutifs défini par

$$S_{k,i}(r) = \{x_{i-r}, \ldots, x_{i-r+k-1}\}$$

*Version du 22 juin 2012 à 16:35

Si $i \in [\![k-1, N_x-k+1]\!]$, ll y a k choix possible de stencils à k points consécutifs contenant x_i :

$$S_{k,i}(r),\ \forall r \in [\![0, k-1]\!].$$

2 Polynôme d'interpolation d'une fonction

On suppose connues les valeurs $V_i = v(x_i)$, $i \in [\![1, N_x]\!]$ et on souhaite calculer $\overline{V}_{i-1/2} \approx v(x_{i-1/2})$ pour $i \in [\![1, N_x+1]\!]$.

Pour cela on utilise des polynômes d'interpolation de Lagrange de degré $k-1$ judicieusement choisis. Sur chaque intervalle $[x_{i-1/2}; x_{i+1/2}]$, on peut construire un polynôme d'interpolation de degré $k-1$ en choisissant k points consécutifs contenant x_i (le stencil) : $S_{k,i}(r) = \{x_{i-r}, \ldots, x_{i-r+k-1}\}$ $\forall r \in [\![0, k-1]\!]$ Il y a donc k choix possible de stencils à k points consécutifs contenant x_i :

$$S_{k,i}(r),\ \forall r \in [\![0, k-1]\!].$$

Le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré $k-1$ associé au stencil $S_{k,i}(r)$, noté $\mathbb{P}_{k,i}^{[r]}$, vérifiant

$$\mathbb{P}_{k,i}^{[r]}(x_{i-r+j}) = V_{i-r+j},\ \forall j \in [\![0, k-1]\!] \tag{2.1}$$

est donné par

$$\mathbb{P}_{k,i}^{[r]}(x) = \sum_{j=0}^{k-1} V_{i-r+j} L_j^{[r]}(x) \tag{2.2}$$

avec

$$L_j^{[r]}(x) = \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^{k-1} \frac{x - x_{i-r+l}}{x_{i-r+j} - x_{i-r+l}}.$$

Soit $r \in [\![0, k-1]\!]$, si la fonction $v \in \mathcal{C}^{k+1}([x_{i-r}, x_{i-r+k-1}]; \mathbb{R})$ alors

$$\mathbb{P}_{k,i}^{[r]}(x) = v(x) + \mathcal{O}(\Delta x^k),\ \forall x \in [x_{i-r}, x_{i-r+k-1}]. \tag{2.3}$$

On cherche à calculer ce polynôme aux points $x_{i-1/2}$ et $x_{i+1/2}$. Dans le cas de points équidistants on a $\forall r \in [\![0, k-1]\!]$, $\forall j \in [\![0, k-1]\!]$,

$$\begin{aligned} L_j^{[r]}(x_{i-1/2}) &= \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^{k-1} \frac{r-l-1/2}{j-l} \\ L_j^{[r]}(x_{i+1/2}) &= \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^{k-1} \frac{r-l+1/2}{j-l} \end{aligned}$$

On défini $\mathbb{C}^{(k)} \in \mathcal{M}_{k+1,k}(\mathbb{R})$ par $\forall r \in [\![0, k]\!],\ \forall j \in [\![0, k-1]\!]$

$$\mathbb{C}_{r+1,j+1}^{(k)} = \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^{k-1} \frac{r-l-1/2}{j-l}. \tag{2.4}$$

On a alors, $\forall r \in [\![0, k-1]\!]$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{k,i}^{[r]}(x_{i-1/2}) &= \sum_{j=0}^{k-1} V_{i-r+j} \mathbb{C}_{r+1,j+1}^{(k)} \\ \mathbb{P}_{k,i}^{[r]}(x_{i+1/2}) &= \sum_{j=0}^{k-1} V_{i-r+j} \mathbb{C}_{r+2,j+1}^{(k)} \end{aligned}$$

Algorithm 2.1 Calcul de la matrice $\mathbb{C}$ définie par (2.4)

Données : k : polynôme de degré $k-1$.
Résultat : $\mathbb{C}$: matrice de dimension $(k+1) \times k$...

function $\mathbb{C} \leftarrow$ CoefStencilsFonc(k)
    $\mathbb{C} \leftarrow 0$
    for $j \leftarrow 0$ **to** $k-1$ **do**
        $P \leftarrow 1$
        for $r \leftarrow 0$ **to** k **do**
            for $l \leftarrow 0$ **to** $j-1$ **do**
                $P \leftarrow P * (r-l-1/2)/(j-l)$
            end for
            for $l \leftarrow j+1$ **to** $k-1$ **do**
                $P \leftarrow P * (r-l-1/2)/(j-l)$
            end for
            $\mathbb{C}(r+1, j+1) \leftarrow P$
        end for
    end for
end function

Algorithm 2.2 Calcul des vecteurs $\overline{\boldsymbol{V}}^{+}$ et $\overline{\boldsymbol{V}}^{-}$ définis par (5.1) et (5.2)

Données : $\boldsymbol{V}$: vecteur de dimension N_x.
k : polynôme de degré $k-1$.
$\mathbb{C}$: matrice de dimension $(k+1) \times k$
$\boldsymbol{r}$: vecteur de $\mathbb{R}^{N_x}$.
$\boldsymbol{r}(i)$ choix du stencil pour l'intervalle $[x_{i-1/2}; x_{i+1/2}]$.
Résultat : $\overline{\boldsymbol{V}}^{+}$: vecteur de $\mathbb{R}^{N_x}$.
$\overline{\boldsymbol{V}}^{-}$: vecteur de $\mathbb{R}^{N_x}$.

function $[\overline{\boldsymbol{V}}^{+}, \overline{\boldsymbol{V}}^{-}] \leftarrow$ FoncLagrangePM($\boldsymbol{V}, k, \mathbb{C}, \boldsymbol{r}$)
    for $i \leftarrow 1$ **to** N_x **do**
        $\overline{\boldsymbol{V}}^{+}(i) \leftarrow 0$
        $\overline{\boldsymbol{V}}^{-}(i) \leftarrow 0$
        for $j \leftarrow 1$ **to** k **do**
            $\overline{\boldsymbol{V}}^{+}(i) = \overline{\boldsymbol{V}}^{+}(i) + \mathbb{C}(\boldsymbol{r}(i)+1, j) * \boldsymbol{V}(i - \boldsymbol{r}(i) + j - 1)$
            $\overline{\boldsymbol{V}}^{-}(i) = \overline{\boldsymbol{V}}^{-}(i) + \mathbb{C}(\boldsymbol{r}(i)+2, j) * \boldsymbol{V}(i - \boldsymbol{r}(i) + j - 1)$
        end for
    end for
end function

On a par exemple

Le principe des méthodes de type WENO est de rechercher de nouvelles approximations aux points frontières de la i-ème cellule (i.e. aux points $x_{i-1/2}$ et $x_{i-1/2}$) par une combinaison convexe des k polynômes précédents aux points considérés :

$$V^{\mp}_{i\pm 1/2} = \sum_{r=0}^{k-1} \omega^{\mp}_{r} \mathbb{P}^{[r]}_{k,i}(x_{i\pm 1/2})$$

Pour obtenir la stabilité et la consistance de telles formules, il faut que

$$\omega_r^{\mp} \geqslant 0, \ \sum_{r=0}^{k-1} \omega_r^{\mp} = 1. \tag{2.5}$$

Si la fonction v est régulière sur $[x_{i-k+1}, x_{i+k-1}]$, c'est à dire sur l'ensemble des stencils $S_{k,i}(r), \ \forall r \in [\![0, k-1]\!]$, alors il existe des contantes $d_r^{\mp}$ telles que

$$\sum_{r=0}^{k-1} d_r^{\mp} \mathbb{P}_{k,i}^{[r]}(x_{i\pm1/2}) = v(x_{i\pm1/2}) + \mathcal{O}(\Delta x^{2k-1})$$

et, elles vérifient aussi

$$d_r^{\mp} \geqslant 0, \ \sum_{r=0}^{k-1} d_r^{\mp} = 1. \tag{2.6}$$

Dans le cas régulier, on souhaite avoir

$$\omega_r^{\mp} = d_r^{\mp} + \mathcal{O}(\Delta x^{k-1}), \ \forall r \in [\![0, k-1]\!]$$

ce qui donne alors

$$V_{i\pm1/2}^{\mp} = \sum_{r=0}^{k-1} \omega_r^{\mp} \mathbb{P}_{k,i}^{[r]}(x_{i\pm1/2}) = v(x_{i\pm1/2}) + \mathcal{O}(\Delta x^{2k-1}).$$

En effet, on déduit de (2.5) et (2.6) la relation suivante

$$v(x_{i\pm1/2}) \sum_{r=0}^{k-1} (\omega_r^{\mp} - d_r^{\mp}) = 0$$

d'où

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{k-1} \omega_r^{\mp} \mathbb{P}_{k,i}^{[r]}(x_{i\pm1/2}) - \sum_{r=0}^{k-1} d_r^{\mp} \mathbb{P}_{k,i}^{[r]}(x_{i\pm1/2}) &= \sum_{r=0}^{k-1} (\omega_r^{\mp} - d_r^{\mp}) \mathbb{P}_{k,i}^{[r]}(x_{i\pm1/2}) + v(x_{i\pm1/2}) \sum_{r=0}^{k-1} (\omega_r^{\mp} - d_r^{\mp}) \\ &= \sum_{r=0}^{k-1} (\omega_r^{\mp} - d_r^{\mp}) \left(\mathbb{P}_{k,i}^{[r]}(x_{i\pm1/2}) - v(x_{i\pm1/2}) \right) \\ &= \sum_{r=0}^{k-1} \mathcal{O}(\Delta x^{k-1}) \, \mathcal{O}(\Delta x^{k}) = \mathcal{O}(\Delta x^{2k-1}) \end{aligned}$$

On prend alors

$$\omega_r^{\mp} = \frac{\alpha_r^{\mp}}{\sum_{s=0}^{k-1} \alpha_s^{\mp}}, \ \alpha_r^{\mp} = \frac{d_r^{\mp}}{(\varepsilon + \beta_r)^2}, \ \forall r \in [\![0, k-1]\!] \tag{2.7}$$

où β_r mesure la régularité de la fonction v pour le stencil $S_{k,i}(r)$:

$$\beta_r = \sum_{l=0}^{k-1} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \Delta x^{2l-1} \left(\frac{\partial^l \mathbb{P}_{k,i}^{[r]}}{\partial x^l}(x) \right)^2 dx \tag{2.8}$$

Notation 1 *On note $\mathcal{W}_{k,\varepsilon}$ l'application suivante :*

$$\left\{ \begin{array}{lllll} \mathcal{W}_{k,\varepsilon} & : & \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k & \longrightarrow & \mathbb{R}^k \\ & & (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) & \longmapsto & \boldsymbol{w} = \mathcal{W}_{k,\varepsilon}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \end{array} \right. \tag{2.9}$$

où les composantes du vecteur $\boldsymbol{w}$ sont données par

$$w_i = \frac{\alpha_i}{\sum_{j=1}^{k} \alpha_j}, \ \alpha_i = \frac{u_i}{(\varepsilon + v_i)^2}, \ \forall i \in [\![1, k]\!] \tag{2.10}$$

En notant $\boldsymbol{d}^+ = (d_0^+, \dots, d_{k-1}^+)^t$, $\boldsymbol{d}^- = (d_0^-, \dots, d_{k-1}^-)^t$ et $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \dots, \beta_{k-1})^t$, on a

$$\boldsymbol{\omega}^+ = \mathcal{W}_{k,\varepsilon}(\boldsymbol{d}^+, \boldsymbol{\beta}) \;\text{ et }\; \boldsymbol{\omega}^- = \mathcal{W}_{k,\varepsilon}(\boldsymbol{d}^-, \boldsymbol{\beta}).$$

Pour $k = 3$, on obtient :

$$\begin{array}{lcl} \beta_0 & = & \frac{13}{12}\left(V_i - 2V_{i+1} + V_{i+2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(3V_i - 4V_{i+1} + V_{i+2}\right)^2 \\ \beta_1 & = & \frac{13}{12}\left(V_{i-1} - 2V_i + V_{i+1}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(V_{i-1} - V_{i+1}\right)^2 \\ \beta_2 & = & \frac{13}{12}\left(V_{i-2} - 2V_{i-1} + V_i\right)^2 + \frac{1}{4}\left(V_{i-2} - 4V_{i-1} + 3V_i\right)^2 \end{array} \tag{2.11}$$

et

$$d_0^- = d_2^+ = \frac{3}{10},\; d_1^- = d_1^+ = \frac{3}{5},\; d_2^- = d_0^+ = \frac{1}{10} \tag{2.12}$$

$$\mathbb{C}^{(3)} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 15 & -10 & 3 \\ 3 & 6 & -1 \\ -1 & 6 & 3 \\ 3 & -10 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{P}_{3,i}^{[0]}(x_{i-1/2}) & = & \dfrac{1}{8}\left(15V_i - 10V_{i+1} + 3V_{i+2}\right) \\ \mathbb{P}_{3,i}^{[1]}(x_{i-1/2}) & = & \dfrac{1}{8}\left(3V_{i-1} + 6V_i - V_{i+1}\right) \\ \mathbb{P}_{3,i}^{[2]}(x_{i-1/2}) & = & \dfrac{1}{8}\left(-V_{i-2} + 6V_{i-1} + 3V_i\right) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{P}_{3,i}^{[0]}(x_{i+1/2}) & = & \dfrac{1}{8}\left(3V_i + 6V_{i+1} - V_{i+2}\right) \\ \mathbb{P}_{3,i}^{[1]}(x_{i+1/2}) & = & \dfrac{1}{8}\left(-V_{i-1} + 6V_i + 3V_{i+1}\right) \\ \mathbb{P}_{3,i}^{[2]}(x_{i+1/2}) & = & \dfrac{1}{8}\left(3V_{i-2} - 10V_{i-1} + 15V_i\right) \end{array}$$

On a, si u est suffisament régulière, $\forall r \in [\![0, 2]\!]$,

$$\mathbb{P}_{3,i}^{[r]}(x_{i-1/2}) = u(x_{i-1/2}) + \mathcal{O}(\Delta x^3),\;\; \forall i \in [\![r+1, N-r]\!] \tag{2.13}$$

$$\mathbb{P}_{3,i}^{[r]}(x_{i+1/2}) = u(x_{i+1/2}) + \mathcal{O}(\Delta x^3),\;\; \forall i \in [\![r+1, N-r]\!] \tag{2.14}$$

le *meilleur* polynôme de degré $k-1$ qui s'écrit comme une combinaison des k polynômes associés aux stencils $S_{k,i}(r),\ \forall r \in [\![0, k-1]\!]$. Un tel polynôme s'écrit alors sous la forme ,$\forall i \in [\![k, N-k]\!]$,

$$V_{i+1/2}^- = \sum_{r=0}^{k-1} d_r^- \mathbb{P}_{k,i}^{[r]}(x_{i+1/2})$$

$$V_{i-1/2}^+ = \sum_{r=0}^{k-1} d_r^+ \mathbb{P}_{k,i}^{[r]}(x_{i-1/2})$$

On peut prendre les coefficients d_r^- et d_r^+ de telle sorte que, si u est suffisament régulière,

$$V_{i+1/2}^- = \mathbb{P}_{2k-1,i}^{[k]}(x_{i+1/2}) = v(x_{i+1/2}) + \mathcal{O}(\Delta x^{2k-1})$$

$$V_{i-1/2}^+ = \mathbb{P}_{2k-1,i}^{[k]}(x_{i-1/2}) = v(x_{i-1/2}) + \mathcal{O}(\Delta x^{2k-1}).$$

les *meilleurs* coefficients

$$\mathbb{C}^{(5)} = \frac{1}{384}\begin{pmatrix} 945 & -1260 & 1134 & -540 & 105 \\ 105 & 420 & -210 & 84 & -15 \\ -15 & 180 & 270 & -60 & 9 \\ 9 & -60 & 270 & 180 & -15 \\ -15 & 84 & -210 & 420 & 105 \\ 105 & -540 & 1134 & -1260 & 945 \end{pmatrix}$$

ce qui donne plus particulièrement

$$\mathbb{P}_{5,i}^{[2]}(x_{i-1/2}) = \frac{1}{384}\left(-15V_{i-2} + 180V_{i-1} + 270V_i - 60V_{i+1} + 9V_{i+2}\right) \tag{2.15}$$

$$\mathbb{P}_{5,i}^{[2]}(x_{i+1/2}) = \frac{1}{384}\left(9V_{i-2} - 60V_{i-1} + 270V_i + 180V_{i+1} - 15V_{i+2}\right) \tag{2.16}$$

On cherche d_r^+ et d_r^-, $r \in [\![0,2]\!]$ tels que

$$\mathbb{P}_{5,i}^{[2]}(x_{i-1/2}) = \sum_{r=0}^{2} d_r^+ \mathbb{P}_{3,i}^{[r]}(x_{i-1/2})$$

et

$$\mathbb{P}_{5,i}^{[2]}(x_{i+1/2}) = \sum_{r=0}^{2} d_r^- \mathbb{P}_{3,i}^{[r]}(x_{i+1/2}).$$

$$\mathbb{P}_{5,i}^{[2]}(x_{i-1/2}) = \frac{1}{8}\left(-d_2^+V_{i-2} + (3d_1^+ + 6d_2^+)V_{i-1} + (15d_0^+ + 6d_1^+ + 3d_2^+)V_i - (10d_0^+ + d_1^+)V_{i+1} + 3d_0^+V_{i+2}\right) \tag{2.17}$$

En identifiant (2.17) et (2.15), on obtient

$$\begin{cases} 48(-d_2^+) & = & -15 \\ 48(3d_1^+ + 6d_2^+) & = & 180 \\ 48(3d_2^+ + 6d_1^+ + 15d_0^+) & = & 270 \\ 48(-10d_0^+ - d_1^+) & = & -60 \\ 48(3d_0^+) & = & 9 \end{cases}$$

ce qui donne

$$d_0^+ = \frac{3}{48},\ d_1^+ = \frac{30}{48} \ \text{ et } \ d_2^+ = \frac{15}{48}.$$

De même

$$\mathbb{P}_{5,i}^{[2]}(x_{i+1/2}) = \frac{1}{8}\left(3d_2^-V_{i-2} - (d_1^- + 10d_2^-)V_{i-1} + (3d_0^- + 6d_1^- + 153d_2^-)V_i + (6d_0^- + 3d_1^-)V_{i+1} - d_0^-V_{i+2}\right) \tag{2.18}$$

En identifiant (2.18) et (2.16), on obtient

$$\begin{cases} 48(3d_2^-) & = & 9 \\ 48(-d_1^- - 10d_2^-) & = & -60 \\ 48(15d_2^- + 6d_1^- + 3d_0^-) & = & 270 \\ 48(6d_0^- + 3d_1^-) & = & 180 \\ 48(-d_0^-) & = & -15 \end{cases}$$

ce qui donne

$$d_0^- = \frac{15}{48},\ d_1^- = \frac{30}{48} \ \text{ et } \ d_2^- = \frac{3}{48}.$$

Les schémas de type WENO s'écrivent

$$V_{i+1/2}^+ =$$

3 Polynôme d'interpolation de la dérivée d'une fonction

On connait $v(x_i)$ $\forall i \in [\![1, N_x]\!]$. On souhaite calculer $\overline{dV}_i \approx \frac{dv}{dx}(x_i)$, $\forall i \in [\![1, N_x]\!]$ et $\overline{dV}_{i+1/2} \approx \frac{dv}{dx}(x_{i+1/2})$, $\forall i \in [\![0, N_x]\!]$.

En dérivant l'équation (2.2), on obtient, $\forall r \in [\![0, k-1]\!]$,

$$\frac{d\mathbb{P}_{k,i}^{[r]}}{dx}(x) = \sum_{j=0}^{k-1} V(x_{i-r+j}) \frac{dL_j^{[r]}}{dx}(x) \quad \forall x \in [x_{i-r}, x_{i-r+k-1}] \tag{3.1}$$

avec $\forall j \in [\![0, k-1]\!]$

$$\frac{dL_j^{[r]}}{dx}(x) = \frac{\displaystyle\sum_{\substack{m=0\\m\neq j}}^{k-1} \prod_{\substack{l=0\\l\neq j,m}}^{k-1} (x - x_{i-r+l})}{\displaystyle\prod_{\substack{l=0\\l\neq j}}^{k-1} (x_{i-r+j} - x_{i-r+l})}, \quad \forall x \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \tag{3.2}$$

Comme les points sont équidistants, on obtient

$$\frac{dL_j^{[r]}}{dx}(x_i) = \frac{\displaystyle\sum_{\substack{m=0\\m\neq j}}^{k-1} \prod_{\substack{l=0\\l\neq j,m}}^{k-1} (r - l)}{\displaystyle\Delta x \prod_{\substack{l=0\\l\neq j}}^{k-1} (j - l)} \tag{3.3}$$

$$\frac{dL_j^{[r]}}{dx}(x_{i-1/2}) = \frac{\displaystyle\sum_{\substack{m=0\\m\neq j}}^{k-1} \prod_{\substack{l=0\\l\neq j,m}}^{k-1} (r - l - 1/2)}{\displaystyle\Delta x \prod_{\substack{l=0\\l\neq j}}^{k-1} (j - l)} \tag{3.4}$$

$$\frac{dL_j^{[r]}}{dx}(x_{i+1/2}) = \frac{\displaystyle\sum_{\substack{m=0\\m\neq j}}^{k-1} \prod_{\substack{l=0\\l\neq j,m}}^{k-1} (r - l + 1/2)}{\displaystyle\Delta x \prod_{\substack{l=0\\l\neq j}}^{k-1} (j - l)} \tag{3.5}$$

$$\tag{3.6}$$

On défini $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_{k,k}(\mathbb{R})$ par $\forall r \in [\![0, k-1]\!]$, $\forall j \in [\![0, k-1]\!]$

$$\mathbb{D}_{r+1,j+1} = \frac{\displaystyle\sum_{\substack{m=0\\m\neq j}}^{k-1} \prod_{\substack{l=0\\l\neq j,m}}^{k-1} (r - l)}{\displaystyle\Delta x \prod_{\substack{l=0\\l\neq j}}^{k-1} (j - l)}. \tag{3.7}$$

et $\bar{\mathbb{D}} \in \mathcal{M}_{k+1,k}(\mathbb{R})$ par $\forall r \in [\![0,k]\!],\ \forall j \in [\![0,k-1]\!]$

$$\bar{\mathbb{D}}_{r+1,j+1} = \frac{\displaystyle\sum_{\substack{m=0\\ m\neq j}}^{k-1} \prod_{\substack{l=0\\ l\neq j,m}}^{k-1} (r-l-1/2)}{\displaystyle\Delta x \prod_{\substack{l=0\\ l\neq j}}^{k-1} (j-l)}. \tag{3.8}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbb{P}_{k,i}^{[r]}}{dx}(x_i) &= \sum_{j=0}^{k-1} V_{i-r+j}\mathbb{D}_{r+1,j+1}\\
\frac{d\mathbb{P}_{k,i}^{[r]}}{dx}(x_{i-1/2}) &= \sum_{j=0}^{k-1} V_{i-r+j}\bar{\mathbb{D}}_{r+1,j+1}\\
\frac{d\mathbb{P}_{k,i}^{[r]}}{dx}(x_{i+1/2}) &= \sum_{j=0}^{k-1} V_{i-r+j}\bar{\mathbb{D}}_{r+2,j+1}
\end{aligned}$$

On note $\overline{\boldsymbol{dV}}$, $\overline{\boldsymbol{dV}}^+$ et $\overline{\boldsymbol{dV}}^-$ les trois vecteurs de $\mathbb{R}^{N_x}$ définis par, $\forall i \in [\![1,N_x]\!]$,

$$\left\{\begin{aligned}
\overline{dV}_i &= \frac{d\mathbb{P}_{k,i}^{[R(i)]}}{dx}(x_i) && (3.9)\\
\overline{dV}_i^+ &= \frac{d\mathbb{P}_{k,i}^{[R(i)]}}{dx}(x_{i-1/2}) && (3.10)\\
\overline{dV}_i^- &= \frac{d\mathbb{P}_{k,i}^{[R(i)]}}{dx}(x_{i+1/2}) && (3.11)
\end{aligned}\right.$$

où $R(i)$ est le choix du stencil de ENO associé à l'intervalle $[x_{i-1/2};x_{i+1/2}]$.

Algorithm 3.1 Calcul des matrices $\mathbb{D}$ et $\bar{\mathbb{D}}$ définies en (3.7) et (3.8)

Données : k : polynôme de degré $k-1$.
Résultat : $\mathbb{D}$: matrice de $\mathcal{M}_{k,k}(\mathbb{R})$,
$\bar{\mathbb{D}}$: matrice de $\mathcal{M}_{k+1,k}(\mathbb{R})$

```
function [𝔻, 𝔻̄] ← CoefStencilsDiff(k, h)
    𝔻 ← 0
    𝔻̄ ← 0
    denom ← 0                                          ▻ vecteur de dimension k
    for j ← 0 to k − 1 do
        P ← 1
        for l ← 0 to k, l ≠ j do
            P ← P ∗ (j − l)
        end for
        denom(j + 1) ← h ∗ P
    end for
    for j ← 0 to k − 1 do
        for r ← 0 to k − 1 do                          ▻ calcul de 𝔻
            S ← 0
            for m ← 0 to k − 1, m ≠ j do
                P ← 1
                for l ← 0 to k − 1, l ≠ j, l ≠ m do
                    P ← P ∗ (r − l)
                end for
                S ← S + P
            end for
            𝔻(r + 1, j + 1) ← S/denom(j + 1)
        end for
        for r ← 0 to k do                              ▻ calcul de 𝔻̄
            S ← 0
            for m ← 0 to k − 1, m ≠ j do
                P ← 1
                for l ← 0 to k − 1, l ≠ j, l ≠ m do
                    P ← P ∗ (r − l − 1/2)
                end for
                S ← S + P
            end for
            𝔻̄(r + 1, j + 1) ← S/denom(j + 1)
        end for
    end for
end function
```

Algorithm 3.2 Calcul du vecteur $\overline{\boldsymbol{dV}}$ défini par (3.9)

Données : $\boldsymbol{V}$: vecteur de dimension N_x.
k : polynôme de degré $k-1$.
$\mathbb{D}$: matrice de de $\mathcal{M}_{k,k}(\mathbb{R})$, définie par (3.7)
$\boldsymbol{r}$: vecteur de $\mathbb{R}^{N_x}$.
$\boldsymbol{r}(i)$ choix du stencil pour l'intervalle $[x_{i-1/2}; x_{i+1/2}]$.

Résultat : $\overline{\boldsymbol{dV}}$: vecteur de $\mathbb{R}^{N_x}$.

function $\overline{\boldsymbol{dV}} \leftarrow$ DiffFoncLagrange($\boldsymbol{V}, k, \mathbb{D}, \boldsymbol{r}$)
  for $i \leftarrow 1$ **to** N_x **do**
    $\overline{\boldsymbol{dV}}(i) \leftarrow 0$
    for $j \leftarrow 1$ **to** k **do**
      $\overline{\boldsymbol{dV}}(i) = \overline{\boldsymbol{dV}}(i) + \mathbb{D}(\boldsymbol{r}(i)+1, j) * \boldsymbol{V}(i-\boldsymbol{r}(i)+j-1)$
    end for
  end for
end function

Algorithm 3.3 Calcul des vecteurs $\overline{\boldsymbol{dV}}^+$ et $\overline{\boldsymbol{dV}}^-$ définis par (3.10) et (3.10)

Données : $\boldsymbol{V}$: vecteur de dimension N_x.
k : polynôme de degré $k-1$.
$\bar{\mathbb{D}}$: matrice de de $\mathcal{M}_{k+1,k}(\mathbb{R})$, définie par (3.8)
$\boldsymbol{r}$: vecteur de $\mathbb{R}^{N_x}$.
$\boldsymbol{r}(i)$ choix du stencil pour l'intervalle $[x_{i-1/2}; x_{i+1/2}]$.

Résultat : $\overline{\boldsymbol{dV}}^+$: vecteur de $\mathbb{R}^{N_x}$.
$\overline{\boldsymbol{dV}}^-$: vecteur de $\mathbb{R}^{N_x}$.

function $[\overline{\boldsymbol{dV}}^+, \overline{\boldsymbol{dV}}^-] \leftarrow$ DiffFoncLagrangePM($\boldsymbol{V}, k, \bar{\mathbb{D}}, \boldsymbol{r}$)
  for $i \leftarrow 1$ **to** N_x **do**
    $\overline{\boldsymbol{dV}}^+(i) \leftarrow 0$
    $\overline{\boldsymbol{dV}}^-(i) \leftarrow 0$
    for $j \leftarrow 1$ **to** k **do**
      $\overline{\boldsymbol{dV}}^+(i) = \overline{\boldsymbol{dV}}^+(i) + \bar{\mathbb{D}}(\boldsymbol{r}(i)+1, j) * \boldsymbol{V}(i-\boldsymbol{r}(i)+j-1)$
      $\overline{\boldsymbol{dV}}^-(i) = \overline{\boldsymbol{dV}}^-(i) + \bar{\mathbb{D}}(\boldsymbol{r}(i)+2, j) * \boldsymbol{V}(i-\boldsymbol{r}(i)+j-1)$
    end for
  end for
end function

3.1 Calcul de $v'(x_i)$, $v'(x_{i-1/2})$ et $v'(x_{i+1/2})$ avec 5 points + centré

Pour $k = 5$, on a

$$\mathbb{D} = \frac{1}{12\Delta x}\begin{pmatrix} -25 & 48 & -36 & 16 & -3 \\ -3 & -10 & 18 & -6 & 1 \\ 1 & -8 & 0 & 8 & -1 \\ -1 & 6 & -18 & 10 & 3 \\ 3 & -16 & 36 & -48 & 25 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbb{D}} = \frac{1}{24\Delta x}\begin{pmatrix} -93 & 229 & -225 & 111 & -22 \\ -22 & 17 & 9 & -5 & 1 \\ 1 & -27 & 27 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -27 & 27 & -1 \\ -1 & 5 & -9 & -17 & 22 \\ 22 & -111 & 225 & -229 & 93 \end{pmatrix},$$

On obtient les formules centrées pour $r = 2$:

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbb{P}_{5,i}^{[2]}}{dx}(x_i) &= \frac{1}{12\Delta x}\left(V_{i-2} - 8V_{i-1} + 8V_{i+1} - V_{i+2}\right) && (3.12)\\
\frac{d\mathbb{P}_{5,i}^{[2]}}{dx}(x_{i-1/2}) &= \frac{1}{24\Delta x}\left(V_{i-2} - 27V_{i-1} + 27V_i - V_{i+1}\right) && (3.13)\\
\frac{d\mathbb{P}_{5,i}^{[2]}}{dx}(x_{i+1/2}) &= \frac{1}{24\Delta x}\left(V_{i-1} - 27V_i + 27V_{i+1} - V_{i+2}\right) && (3.14)
\end{aligned}$$

3.2 Calcul de $v'(x_i)$ avec 3 points + WENO

Pour $k = 3$, on a

$$\mathbb{D} = \frac{1}{2\Delta x}\begin{pmatrix} -3 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}, \ \bar{\mathbb{D}} = \frac{1}{\Delta x}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix},$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbb{P}_{3,i}^{[0]}}{dx}(x_i) &= \frac{1}{2\Delta x}(-3V_i + 4V_{i+1} - V_{i+2})\\
\frac{d\mathbb{P}_{3,i}^{[1]}}{dx}(x_i) &= \frac{1}{2\Delta x}(V_{i+1} - V_{i-1})\\
\frac{d\mathbb{P}_{3,i}^{[2]}}{dx}(x_i) &= \frac{1}{2\Delta x}(V_{i-2} - 4V_{i-1} + 3V_i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbb{P}_{3,i}^{[0]}}{dx}(x_{i-1/2}) &= \frac{1}{\Delta x}(-2V_i + 3V_{i+1} - V_{i+2})\\
\frac{d\mathbb{P}_{3,i}^{[1]}}{dx}(x_{i-1/2}) &= \frac{1}{\Delta x}(V_i - V_{i-1})\\
\frac{d\mathbb{P}_{3,i}^{[2]}}{dx}(x_{i-1/2}) &= \frac{1}{\Delta x}(V_{i+1} - V_i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbb{P}_{3,i}^{[0]}}{dx}(x_{i+1/2}) &= \frac{1}{\Delta x}(V_i - V_{i-1})\\
\frac{d\mathbb{P}_{3,i}^{[1]}}{dx}(x_{i+1/2}) &= \frac{1}{\Delta x}(V_{i+1} - V_i)\\
\frac{d\mathbb{P}_{3,i}^{[2]}}{dx}(x_{i+1/2}) &= \frac{1}{\Delta x}(V_{i-2} - 3V_{i-1} + 2V_i)
\end{aligned}$$

On cherche κ_r tels que

$$\frac{d\mathbb{P}_{5,i}^{[2]}}{dx}(x_i) = \sum_{r=0}^{2} \kappa_r \frac{d\mathbb{P}_{3,i}^{[r]}}{dx}(x_i).$$

C'est à dire

$$\begin{aligned}
2\Delta x \frac{d\mathbb{P}_{5,i}^{[2]}}{dx}(x_i) &= \kappa_0\left(-3V_i + 4V_{i+1} - V_{i+2}\right) + \kappa_1\left(V_{i+1} - V_{i-1}\right) + \kappa_2\left(V_{i-2} - 4V_{i-1} + 3V_i\right)\\
&= \kappa_2 V_{i-2} - (\kappa_1 + 4\kappa_2)V_{i-1} + (-3\kappa_0 + 3\kappa_2)V_i + (4\kappa_0 + \kappa_1)V_{i+1} - \kappa_0 V_{i+2}.
\end{aligned}$$

En identifiant avec (3.12), on est amené à résoudre le système

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \\ -3 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_0 \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \\ \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$\kappa_0 = 1/6, \ \kappa_1 = 2/3, \ \kappa_2 = 1/6.$$

Soient $\boldsymbol{\kappa} = (\kappa_0, \dots, \kappa_{k-1})^t$ et $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \dots, \beta_{k-1})^t$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^k$.

On note $\boldsymbol{\kappa}^{\text{WENO}} = (\kappa_0^{\text{WENO}}, \dots, \kappa_{k-1}^{\text{WENO}})^t$ le vecteur de $\mathbb{R}^k$ défini par

$$\boldsymbol{\kappa}^{\text{WENO}} = \mathcal{W}_\varepsilon(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\beta})$$

Alors l'approximation de WENO de $v'(x_i)$ est donnée par

$$dV_i^{\text{WENO}} = \sum_{r=0}^{3} \kappa_r^{\text{WENO}} \frac{d\mathbb{P}_{3,i}^{[r]}}{dx}(x_i) \tag{3.15}$$

Soient $\boldsymbol{\kappa} = (\kappa_0, \dots, \kappa_{k-1})^t$ et $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \dots, \beta_{k-1})^t$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^k$. On note $\mathcal{W}_{k,\varepsilon}$ la fonction de $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ qui pour tous vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ de $\mathbb{R}^k$

4 Reconstruction à partir des valeurs moyennes

On suppose connues les valeurs moyennes de v sur chaque intervalle

$$\bar{v}_i = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} v(\xi) d\xi, \ \text{donné } \forall i \in [\![1, N]\!].$$

Pour chaque $i \in [\![1, N]\!]$, on cherche à évaluer $v(x_i)$, $v(x_{i-1/2})$ et $v(x_{i+1/2})$.

Soit

$$V(x) = \int_{x_{1/2}}^{x} v(\xi) d\xi, \forall x \in [a; b] \tag{4.1}$$

une primitive de v. On a alors, de manière exacte,

$$V(x_{i+1/2}) = \sum_{j=1}^{i} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} v(\xi) d\xi = \sum_{j=1}^{i} \Delta x_j \bar{v}_j, \ \forall i \in [\![0, N]\!] \tag{4.2}$$

Le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré k associé au stencil $S_{k+1,i}(r - 1/2)$ est donné par

$$\mathbb{Q}_{k,i}^{[r-1/2]}(x) = \sum_{m=0}^{k} V_{i-r+m-1/2} L_m^{[r-1/2]}(x) \quad \forall x \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \tag{4.3}$$

avec

$$L_m^{[r-1/2]}(x) = \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq m}}^{k} \frac{x - x_{i-r+l-1/2}}{x_{i-r+m-1/2} - x_{i-r+l-1/2}}.$$

Soit $r \in [\![0, k-1]\!]$, si la fonction v est régulière sur $[x_{i-r-1/2}, x_{i-r+k+1/2}]$ alors, $\forall x \in [x_{i-r-1/2}, x_{i-r+k+1/2}]$,

$$\mathbb{Q}_{k,i}^{[r+1/2]}(x) = V(x) + \mathcal{O}(\Delta x^{k+1}) \tag{4.4}$$

$$\frac{d\mathbb{Q}_{k,i}^{[r+1/2]}}{dx}(x) = V'(x) + \mathcal{O}(\Delta x^k) = v(x) + \mathcal{O}(\Delta x^k). \tag{4.5}$$

On pose

$$\mathbb{P}_{k,i}^{[r+1/2]} = \frac{d\mathbb{Q}_{k,i}^{[r+1/2]}}{dx}.$$

On a alors, $\forall j \in [\![i-r, i+k-r-1]\!]$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Delta x_j}\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \mathbb{P}_{k,i}^{[r+1/2]}(\xi)d\xi &= \frac{1}{\Delta x_j}\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \frac{d\mathbb{Q}_{k,i}^{[r+1/2]}}{dx}(\xi)d\xi \\
&= \frac{1}{\Delta x_j}\left(V(x_{j+1/2}) - V(x_{j-1/2})\right) \\
&= \frac{1}{\Delta x_j}\left(\int_{x_{1/2}}^{x_{j+1/2}} v(\xi)d\xi - \int_{x_{1/2}}^{x_{j-1/2}} v(\xi)d\xi\right) \\
&= \frac{1}{\Delta x_j}\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} v(\xi)d\xi \\
&= \bar{v}_j.
\end{aligned}$$

De part une propriété évidente des polynômes de base de Lagrange, on a

$$\sum_{m=0}^{k} L_m^{[r-1/2]}(x) = 1.$$

On en déduit alors

$$\mathbb{Q}_{k,i}^{[r+1/2]}(x) - V(x_{i-r-1/2}) = \sum_{m=0}^{k} (V(x_{i-r+m-1/2}) - V(x_{i-r-1/2}))L_m^{[r-1/2]}(x) \tag{4.6}$$

Or d'après (4.2),

$$\begin{aligned}
V(x_{i-r+m-1/2}) - V(x_{i-r-1/2}) &= \sum_{j=1}^{i-r+m-1} \Delta x_j \bar{v}_j - \sum_{j=1}^{i-r-1} \Delta x_j \bar{v}_j \\
&= \sum_{j=i-r}^{i-r+m-1} \Delta x_j \bar{v}_j \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} \Delta x_{i-r+j} \bar{v}_{i-r+j}.
\end{aligned}$$

$$\mathbb{Q}_{k,i}^{[r+1/2]}(x) - V(x_{i-r-1/2}) = \sum_{m=0}^{k}\sum_{j=0}^{m-1} \Delta x_{i-r+j} \bar{v}_{i-r+j} L_m^{[r-1/2]}(x) \tag{4.7}$$

En permuttant les boucles, on obtient

$$\mathbb{Q}_{k,i}^{[r+1/2]}(x) - V(x_{i-r-1/2}) = \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{m=j+1}^{k} \Delta x_{i-r+j} \bar{v}_{i-r+j} L_m^{[r-1/2]}(x) \tag{4.8}$$

En dérivant cette equation, on a

$$\mathbb{P}_{k,i}^{[r+1/2]}(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \Delta x_{i-r+j} \bar{v}_{i-r+j} \sum_{m=j+1}^{k} \frac{dL_m^{[r-1/2]}}{dx}(x) \tag{4.9}$$

Or

$$\frac{dL_m^{[r-1/2]}}{dx}(x) = \frac{\displaystyle\sum_{\substack{l=0 \\ l\neq m}}^{k} \prod_{\substack{q=0 \\ q\neq m,l}}^{k} (x - x_{i-r+q-1/2})}{\displaystyle\prod_{\substack{l=0 \\ l\neq m}}^{k} (x_{i-r+m-1/2} - x_{i-r+l-1/2})}$$

ce qui donne

$$\mathbb{P}_{k,i}^{[r+1/2]}(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \Delta x_{i-r+j} \bar{v}_{i-r+j} \sum_{m=j+1}^{k} \frac{\displaystyle\sum_{\substack{l=0\\l\neq m}}^{k} \prod_{\substack{q=0\\q\neq m,l}}^{k} (x - x_{i-r+q-1/2})}{\displaystyle\prod_{\substack{l=0\\l\neq m}}^{k} (x_{i-r+m-1/2} - x_{i-r+l-1/2})} \tag{4.10}$$

et plus particulièrement

$$v_{i+1/2} = \mathbb{P}_{k,i}^{[r+1/2]}(x_{i+1/2}) = \sum_{j=0}^{k-1} d_{rj}(x_{i+1/2}) \bar{v}_{i-r+j} \tag{4.11}$$

$$v_{i-1/2} = \mathbb{P}_{k,i}^{[r+1/2]}(x_{i+1/2}) = \sum_{j=0}^{k-1} d_{rj}(x_{i-1/2}) \bar{v}_{i-r+j} \tag{4.12}$$

$$v_i = \mathbb{P}_{k,i}^{[r+1/2]}(x_i) = \sum_{j=0}^{k-1} d_{rj}(x_i) \bar{v}_{i-r+j} \tag{4.13}$$

avec

$$d_{rj}(x) = \Delta x_{i-r+j} \sum_{m=j+1}^{k} \frac{\displaystyle\sum_{\substack{l=0\\l\neq m}}^{k} \prod_{\substack{q=0\\q\neq m,l}}^{k} (x - x_{i-r+q-1/2})}{\displaystyle\prod_{\substack{l=0\\l\neq m}}^{k} (x_{i-r+m-1/2} - x_{i-r+l-1/2})} \tag{4.14}$$

4.1 Grille uniforme

On suppose ici que $\Delta x = \Delta x_i$. Soit $\mathbb{D}^{[k]} \in \mathcal{M}_{k+1,k}(\mathbb{R})$, la matrice définie par

$$\mathbb{D}_{r+2,j+1}^{[k]} = \sum_{m=j+1}^{k} \frac{\displaystyle\sum_{\substack{l=0\\l\neq m}}^{k} \prod_{\substack{q=0\\q\neq m,l}}^{k} (r-q+1)}{\displaystyle\prod_{\substack{l=0\\l\neq m}}^{k} (m-l)}, \ \forall r \in [\![-1, k-1]\!], \ \forall j \in [\![0, k-1]\!], \tag{4.15}$$

et $\bar{\mathbb{D}}^{[k]} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$, la matrice définie par

$$\bar{\mathbb{D}}_{r+1,j+1}^{[k]} = \sum_{m=j+1}^{k} \frac{\displaystyle\sum_{\substack{l=0\\l\neq m}}^{k} \prod_{\substack{q=0\\q\neq m,l}}^{k} (r-q+1/2)}{\displaystyle\prod_{\substack{l=0\\l\neq m}}^{k} (m-l)}, \ \forall (r,j) \in [\![0, k-1]\!]^2. \tag{4.16}$$

On a alors

$$\mathbb{P}_{k,i}^{[r+1/2]}(x_{i+1/2}) = \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{D}_{r+2,j+1}^{[k]} \bar{v}_{i-r+j} \tag{4.17}$$

$$\mathbb{P}_{k,i}^{[r-1/2]}(x_{i+1/2}) = \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{D}_{r+1,j+1}^{[k]} \bar{v}_{i-r+j} \tag{4.18}$$

$$\mathbb{P}_{k,i}^{[r+1/2]}(x_i) = \sum_{j=0}^{k-1} \bar{\mathbb{D}}_{r+1,j+1}^{[k]} \bar{v}_{i-r+j} \tag{4.19}$$

et on a, d'après (4.5) et $\forall r \in [\![0, k-1]\!]$,

$$
\begin{aligned}
v(x_{i+1/2}) &= \mathbb{P}_{k,i}^{[r+1/2]}(x_{i+1/2}) + \mathcal{O}(\Delta x^k) && (4.20)\\
v(x_{i-1/2}) &= \mathbb{P}_{k,i}^{[r+1/2]}(x_{i-1/2}) + \mathcal{O}(\Delta x^k) && (4.21)\\
v(x_i) &= \mathbb{P}_{k,i}^{[r+1/2]}(x_i) + \mathcal{O}(\Delta x^k). && (4.22)
\end{aligned}
$$

4.2 WENO ordre 5

On cherche $\alpha_r^{\pm} \in \mathbb{R}$, $\alpha_r \in \mathbb{R}$, $r \in [\![0, 2]\!]$ tels que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}_{5,i}^{[2+1/2]}(x_{i-1/2}) &= \sum_{r=0}^{2} \alpha_r^{+} \mathbb{P}_{3,i}^{[r+1/2]}(x_{i-1/2}) && (4.23)\\
\mathbb{P}_{5,i}^{[2+1/2]}(x_{i+1/2}) &= \sum_{r=0}^{2} \alpha_r^{-} \mathbb{P}_{3,i}^{[r+1/2]}(x_{i+1/2}) && (4.24)\\
\mathbb{P}_{5,i}^{[2+1/2]}(x_i) &= \sum_{r=0}^{2} \alpha_r \mathbb{P}_{3,i}^{[r+1/2]}(x_i) && (4.25)
\end{aligned}
$$

On a, pour $k = 3$

$$
\mathbb{D}^{[3]} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 11 & -7 & 2\\ 2 & 5 & -1\\ -1 & 5 & 2\\ 2 & -7 & 11 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \widetilde{\mathbb{D}}^{[3]} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 23 & 2 & -1\\ -1 & 26 & -1\\ -1 & 2 & 23 \end{pmatrix}
$$

On a, pour $k = 5$

$$
\mathbb{D}^{[5]} = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 137 & -163 & 137 & -63 & 12\\ 12 & 77 & -43 & 17 & -3\\ -3 & 27 & 47 & -13 & 2\\ 2 & -13 & 47 & 27 & -3\\ -3 & 17 & -43 & 77 & 12\\ 12 & -63 & 137 & -163 & 137 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \widetilde{\mathbb{D}}^{[5]} = \frac{1}{1920}\begin{pmatrix} 1689 & 684 & -746 & 364 & -71\\ -71 & 2044 & -26 & -36 & 9\\ 9 & -116 & 2134 & -116 & 9\\ 9 & -36 & -26 & 2044 & -71\\ -71 & 364 & -746 & 684 & 1689 \end{pmatrix}
$$

Ce qui donne

$$
\mathbb{P}_{3,i}^{[0+1/2]}(x_{i-1/2}) = \mathbb{D}_{1,:}^{[3]}\bar{v}_{i:i+2},\ \mathbb{P}_{3,i}^{[1+1/2]}(x_{i-1/2}) = \mathbb{D}_{2,:}^{[3]}\bar{v}_{i-1:i+1},\ \mathbb{P}_{3,i}^{[2+1/2]}(x_{i-1/2}) = \mathbb{D}_{3,:}^{[3]}\bar{v}_{i-2:i}, \quad (4.26)
$$

$$
\mathbb{P}_{3,i}^{[0+1/2]}(x_{i+1/2}) = \mathbb{D}_{2,:}^{[3]}\bar{v}_{i:i+2},\ \mathbb{P}_{3,i}^{[1+1/2]}(x_{i+1/2}) = \mathbb{D}_{3,:}^{[3]}\bar{v}_{i-1:i+1},\ \mathbb{P}_{3,i}^{[2+1/2]}(x_{i+1/2}) = \mathbb{D}_{4,:}^{[3]}\bar{v}_{i-2:i}, \quad (4.27)
$$

$$
\mathbb{P}_{3,i}^{[0+1/2]}(x_i) = \widetilde{\mathbb{D}}_{1,:}^{[3]}\bar{v}_{i:i+2},\ \mathbb{P}_{3,i}^{[1+1/2]}(x_i) = \widetilde{\mathbb{D}}_{2,:}^{[3]}\bar{v}_{i-1:i+1},\ \mathbb{P}_{3,i}^{[2+1/2]}(x_i) = \widetilde{\mathbb{D}}_{3,:}^{[3]}\bar{v}_{i-2:i}. \quad (4.28)
$$

et

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}_{5,i}^{[2+1/2]}(x_{i-1/2}) &= \mathbb{D}_{3,:}^{[5]}\bar{v}_{i-2:i+2} && (4.29)\\
\mathbb{P}_{5,i}^{[2+1/2]}(x_{i+1/2}) &= \mathbb{D}_{4,:}^{[5]}\bar{v}_{i-2:i+2} && (4.30)\\
\mathbb{P}_{5,i}^{[2+1/2]}(x_i) &= \widetilde{\mathbb{D}}_{3,:}^{[5]}\bar{v}_{i-2:i+2} && (4.31)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}_{5,i}^{[2+1/2]}(x_{i-1/2}) &= \frac{1}{60}\left(-3\bar{v}_{i-2} + 27\bar{v}_{i-1} + 47\bar{v}_i - 13\bar{v}_{i+1} + 2\bar{v}_{i+2}\right) && (4.32)\\
\mathbb{P}_{5,i}^{[2+1/2]}(x_{i+1/2}) &= \frac{1}{60}\left(2\bar{v}_{i-2} - 13\bar{v}_{i-1} + 47\bar{v}_i + 27\bar{v}_{i+1} - 3\bar{v}_{i+2}\right) && (4.33)
\end{aligned}
$$

De (4.23), on obtient

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}_{5,i}^{[2+1/2]}(x_{i-1/2}) &= \frac{1}{6}\left(\alpha_0^{+}(11\bar{v}_i - 7\bar{v}_{i+1} + 2\bar{v}_{i+2}) + \alpha_1^{+}(2\bar{v}_{i-1} + 5\bar{v}_i - \bar{v}_{i+1}) + \alpha_2^{+}(-\bar{v}_{i-2} + 5\bar{v}_{i-1} + 2\bar{v}_i)\right)\\
&= \frac{1}{6}\left[-\alpha_2^{+}\bar{v}_{i-2} + (2\alpha_1^{+}5\alpha_2^{+})\bar{v}_{i-1} + (11\alpha_0^{+} + 5\alpha_1^{+} + 2\alpha_2^{+})\bar{v}_i\right.\\
&\quad \left. + (-7\alpha_0^{+} - \alpha_1^{+})\bar{v}_{i+1} + 2\alpha_0^{+}\bar{v}_{i+2}\right].
\end{aligned}
$$

Par identification, on est amené à résoudre le système

$$\begin{cases} -\alpha_2^+ & = -\frac{3}{10} \\ 2\alpha_1^+ 5\alpha_2^+ & = \frac{27}{10} \\ 11\alpha_0^+ + 5\alpha_1^+ + 2\alpha_2^+ & = \frac{47}{10} \\ -7\alpha_0^+ - \alpha_1^+ & = -\frac{13}{10} \\ 2\alpha_0^+ & = \frac{2}{10} \end{cases}$$

ce qui donne

$$\alpha_0^+ = \frac{1}{10},\ \alpha_1^+ = \frac{6}{10} \ \text{ et } \ \alpha_2^+ = \frac{3}{10}. \tag{4.34}$$

De (4.24), on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{5,i}^{[2+1/2]}(x_{i+1/2}) &= \frac{1}{6}\left(\alpha_0^-(2\bar{v}_i + 5\bar{v}_{i+1} - \bar{v}_{i+2}) + \alpha_1^-(-\bar{v}_{i-1} + 5\bar{v}_i + 2\bar{v}_{i+1}) + \alpha_2^-(2\bar{v}_{i-2} - 7\bar{v}_{i-1} + 11\bar{v}_i)\right) \\ &= \frac{1}{6}\left[2\alpha_2^-\bar{v}_{i-2} + (-\alpha_1^- - 7\alpha_2^-)\bar{v}_{i-1} + (2\alpha_0^- + 5\alpha_1^- + 11\alpha_2^-)\bar{v}_i \right. \\ &\quad \left. + (5\alpha_0^- + 2\alpha_1^-)\bar{v}_{i+1} - \alpha_0^-\bar{v}_{i+2}\right]. \end{aligned}$$

Par identification, on est amené à résoudre le système

$$\begin{cases} 2\alpha_2^- & = \frac{2}{10} \\ -\alpha_1^- - 7\alpha_2^- & = -\frac{13}{10} \\ 2\alpha_0^- + 5\alpha_1^- + 11\alpha_2^- & = \frac{47}{10} \\ 5\alpha_0^- + 2\alpha_1^- & = \frac{27}{10} \\ -2\alpha_0^- & = -\frac{3}{10} \end{cases}$$

ce qui donne

$$\alpha_0^- = \frac{3}{10},\ \alpha_1^- = \frac{6}{10} \ \text{ et } \ \alpha_2^- = \frac{1}{10}. \tag{4.35}$$

De (4.25), on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{5,i}^{[2+1/2]}(x_i) &= \frac{1}{24}\left(\alpha_0(23\bar{v}_i + 2\bar{v}_{i+1} - \bar{v}_{i+2}) + \alpha_1(-\bar{v}_{i-1} + 26\bar{v}_i - \bar{v}_{i+1}) + \alpha_2(-\bar{v}_{i-2} + 2\bar{v}_{i-1} + 23\bar{v}_i)\right) \\ &= \frac{1}{24}\left[-\alpha_2\bar{v}_{i-2} + (-\alpha_1 + 2\alpha_2)\bar{v}_{i-1} + (23\alpha_0 + 26\alpha_1 + 23\alpha_2)\bar{v}_i \right. \\ &\quad \left. + (2\alpha_0 - \alpha_1)\bar{v}_{i+1} - \alpha_0\bar{v}_{i+2}\right]. \end{aligned}$$

Par identification, on est amené à résoudre le système

$$\begin{cases} -\alpha_2 & = \frac{9\times 24}{1920} \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 & = -\frac{116\times 24}{1920} \\ 23\alpha_0 + 26\alpha_1 + 23\alpha_2 & = \frac{2134\times 24}{1920} \\ 2\alpha_0 - \alpha_1 & = -\frac{116\times 24}{1920} \\ -\alpha_0 & = \frac{9\times 24}{1920} \end{cases}$$

ce qui donne

$$\alpha_0 = -\frac{9}{80},\ \alpha_1 = \frac{98}{80} \ \text{ et } \ \alpha_2 = -\frac{9}{80}. \tag{4.36}$$

5 old

On note $\overline{\boldsymbol{V}}^+$ et $\overline{\boldsymbol{V}}^-$ les deux vecteurs de $\mathbb{R}^{N_x}$ définis par, $\forall i \in [\![1, N_x]\!]$,

$$\begin{cases} \overline{V}_i^+ = \mathbb{P}_{k,i}^{[R(i)]}(x_{i-1/2}) & (5.1) \\ \overline{V}_i^- = \mathbb{P}_{k,i}^{[R(i)]}(x_{i+1/2}) & (5.2) \end{cases}$$

où $R(i)$ est le choix du stencil de ENO associé à l'intervalle $[x_{i-1/2}; x_{i+1/2}]$.

6 Matrices

6.1 k=3

$$\mathbb{C}^{[3]} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 15 & -10 & 3 \\ 3 & 6 & -1 \\ -1 & 6 & 3 \\ 3 & -10 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{D}^{[3]} = \frac{1}{2\Delta x}\begin{pmatrix} -3 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\mathbb{D}}^{[3]} = \frac{1}{\Delta x}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

6.2 k=4

$$\mathbb{C}^{[4]} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 35 & -35 & 21 & -5 \\ 5 & 15 & -5 & 1 \\ -1 & 9 & 9 & -1 \\ 1 & -5 & 15 & 5 \\ -5 & 21 & -35 & 35 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{D}^{[4]} = \frac{1}{6\Delta x}\begin{pmatrix} -11 & 18 & -9 & 2 \\ -2 & -3 & 6 & -1 \\ 1 & -6 & 3 & 2 \\ -2 & 9 & -18 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\mathbb{D}}^{[4]} = \frac{1}{24\Delta x}\begin{pmatrix} -71 & 141 & -93 & 23 \\ -23 & 21 & 3 & -1 \\ 1 & -27 & 27 & -1 \\ 1 & -3 & -21 & 23 \\ -23 & 93 & -141 & 71 \end{pmatrix}$$

6.3 k=5

$$\mathbb{C}^{[5]} = \frac{1}{128}\begin{pmatrix} 315 & -420 & 378 & -180 & 35 \\ 35 & 140 & -70 & 28 & -5 \\ -5 & 60 & 90 & -20 & 3 \\ 3 & -20 & 90 & 60 & -5 \\ -5 & 28 & -70 & 140 & 35 \\ 35 & -180 & 378 & -420 & 315 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{D}^{[5]} = \frac{1}{12\Delta x}\begin{pmatrix} -25 & 48 & -36 & 16 & -3 \\ -3 & -10 & 18 & -6 & 1 \\ 1 & -8 & 0 & 8 & -1 \\ -1 & 6 & -18 & 10 & 3 \\ 3 & -16 & 36 & -48 & 25 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\mathbb{D}}^{[5]} = \frac{1}{24\Delta x}\begin{pmatrix} -93 & 229 & -225 & 111 & -22 \\ -22 & 17 & 9 & -5 & 1 \\ 1 & -27 & 27 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -27 & 27 & -1 \\ -1 & 5 & -9 & -17 & 22 \\ 22 & -111 & 225 & -229 & 93 \end{pmatrix}$$

6.4 k=6

$$\mathbb{C}^{[6]} = \frac{1}{256}\begin{pmatrix} 693 & -1155 & 1386 & -990 & 385 & -63 \\ 63 & 315 & -210 & 126 & -45 & 7 \\ -7 & 105 & 210 & -70 & 21 & -3 \\ 3 & -25 & 150 & 150 & -25 & 3 \\ -3 & 21 & -70 & 210 & 105 & -7 \\ 7 & -45 & 126 & -210 & 315 & 63 \\ -63 & 385 & -990 & 1386 & -1155 & 693 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{D}^{[6]} = \frac{1}{60\Delta x}\begin{pmatrix} -137 & 300 & -300 & 200 & -75 & 12 \\ -12 & -65 & 120 & -60 & 20 & -3 \\ 3 & -30 & -20 & 60 & -15 & 2 \\ -2 & 15 & -60 & 20 & 30 & -3 \\ 3 & -20 & 60 & -120 & 65 & 12 \\ -12 & 75 & -200 & 300 & -300 & 137 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\mathbb{D}}^{[6]} = \frac{1}{1920\Delta x}\begin{pmatrix} -9129 & 26765 & -34890 & 25770 & -10205 & 1689 \\ -1689 & 1005 & 1430 & -1110 & 435 & -71 \\ 71 & -2115 & 2070 & 10 & -45 & 9 \\ -9 & 125 & -2250 & 2250 & -125 & 9 \\ -9 & 45 & -10 & -2070 & 2115 & -71 \\ 71 & -435 & 1110 & -1430 & -1005 & 1689 \\ -1689 & 10205 & -25770 & 34890 & -26765 & 9129 \end{pmatrix}$$

6.5 k=7

$$\mathbb{C}^{[7]} = \frac{1}{1024}\begin{pmatrix} 3003 & -6006 & 9009 & -8580 & 5005 & -1638 & 231 \\ 231 & 1386 & -1155 & 924 & -495 & 154 & -21 \\ -21 & 378 & 945 & -420 & 189 & -54 & 7 \\ 7 & -70 & 525 & 700 & -175 & 42 & -5 \\ -5 & 42 & -175 & 700 & 525 & -70 & 7 \\ 7 & -54 & 189 & -420 & 945 & 378 & -21 \\ -21 & 154 & -495 & 924 & -1155 & 1386 & 231 \\ 231 & -1638 & 5005 & -8580 & 9009 & -6006 & 3003 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{D}^{[7]} = \frac{1}{60\Delta x}\begin{pmatrix} -147 & 360 & -450 & 400 & -225 & 72 & -10 \\ -10 & -77 & 150 & -100 & 50 & -15 & 2 \\ 2 & -24 & -35 & 80 & -30 & 8 & -1 \\ -1 & 9 & -45 & 0 & 45 & -9 & 1 \\ 1 & -8 & 30 & -80 & 35 & 24 & -2 \\ -2 & 15 & -50 & 100 & -150 & 77 & 10 \\ 10 & -72 & 225 & -400 & 450 & -360 & 147 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\mathbb{D}}^{[7]} = \frac{1}{1920\Delta x}\begin{pmatrix} -10756 & 36527 & -59295 & 58310 & -34610 & 11451 & -1627 \\ -1627 & 633 & 2360 & -2350 & 1365 & -443 & 62 \\ 62 & -2061 & 1935 & 190 & -180 & 63 & -9 \\ -9 & 125 & -2250 & 2250 & -125 & 9 & 0 \\ 0 & -9 & 125 & -2250 & 2250 & -125 & 9 \\ 9 & -63 & 180 & -190 & -1935 & 2061 & -62 \\ -62 & 443 & -1365 & 2350 & -2360 & -633 & 1627 \\ 1627 & -11451 & 34610 & -58310 & 59295 & -36527 & 10756 \end{pmatrix}$$

7 Calcul des coefficients de régularités : β_r

On pose $h = \Delta x$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $r \in [\![0, k-1]\!]$. On veut calculer β_r qui mesure la régularité du polynôme d'interpolation de Lagrange pour la fonction v sur le stencil $S_{k,i}(r)$. On choisi

$$\beta_r = \sum_{l=0}^{k-1} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \Delta x^{2l-1} \left(\frac{\partial^l \mathbb{P}_{k,i}^{[r]}}{\partial x^l}(x) \right)^2 dx \tag{7.1}$$

avec

$$\mathbb{P}_{k,i}^{[r]}(x) = \sum_{j=0}^{k-1} V_{i-r+j} L_j^{[r]}(x)$$

et

$$L_j^{[r]}(x) = \prod_{\substack{l=0 \\ l\neq j}}^{k-1} \frac{x - x_{i-r+l}}{x_{i-r+j} - x_{i-r+l}}.$$

7.1 $k = 3$

On a, $\forall r \in [\![0, 2]\!]$,

$$\begin{aligned} \beta_r &= \frac{1}{h}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left(\mathbb{P}_{3,i}^{[r]}(x)\right)^2 dx + h\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left(\frac{\partial \mathbb{P}_{3,i}^{[r]}}{\partial x}(x)\right)^2 dx + h^3 \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left(\frac{\partial^2 \mathbb{P}_{3,i}^{[r]}}{\partial x^2}(x)\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2} \left(\mathbb{P}_{3,i}^{[r]}(x_i+s)\right)^2 ds + h\int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{\partial \mathbb{P}_{3,i}^{[r]}}{\partial x}(x_i+s)\right)^2 ds + h^3 \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{\partial^2 \mathbb{P}_{3,i}^{[r]}}{\partial x^2}(x_i+s)\right)^2 ds \end{aligned}$$

7.1.1 Calcul de β_0

On a

$$\mathbb{P}_{3,i}^{[0]}(x) = V_i L_0^{[0]}(x) + V_{i+1} L_1^{[0]}(x) + V_{i+2} L_2^{[0]}(x)$$

et, en posant $x = x_i + s$,

$$\begin{aligned} L_0^{[0]}(x) &= L_0^{[0]}(x_i+s) &= \frac{1}{h^2}(s-h)(s-2h) \\ L_1^{[0]}(x) &= L_1^{[0]}(x_i+s) &= \frac{1}{h^2}s(s-2h) \\ L_2^{[0]}(x) &= L_2^{[0]}(x_i+s) &= \frac{1}{h^2}s(s-h) \end{aligned}$$

ce qui donne,

$$\mathbb{P}_{3,i}^{[0]}(x) = \mathbb{P}_{3,i}^{[0]}(s+x_i) = \frac{1}{h^2}\left\{V_i(s-h)(s-2h) + V_{i+1}s(s-2h) + V_{i+2}s(s-h)\right\}$$

$$\beta_0 = \frac{4423}{240} V_i^2 + \frac{881}{40} V_i V_{i+1} + \frac{621}{40} V_i V_{i+2} + \frac{2083}{240} V_{i+1}^2 + \frac{521}{40} V_{i+1}V_{i+2} + \frac{1303}{240} V_{i+2}^2$$

7.1.2 Calcul de β_1

On a

$$\mathbb{P}_{3,i}^{[1]}(x) = V_{i-1}L_0^{[1]}(x) + V_iL_1^{[1]}(x) + V_{i+1}L_2^{[1]}(x)$$

et, en posant $x = x_i + s$,

$$\begin{aligned}
L_0^{[1]}(x) &= L_0^{[1]}(x_i+s) &= \frac{1}{h^2}s(s-h)\\
L_1^{[1]}(x) &= L_1^{[1]}(x_i+s) &= \frac{1}{h^2}(s+h)(s-h)\\
L_2^{[1]}(x) &= L_2^{[1]}(x_i+s) &= \frac{1}{h^2}(s+h)s
\end{aligned}$$

ce qui donne,

$$\mathbb{P}_{3,i}^{[1]}(x) = \mathbb{P}_{3,i}^{[1]}(s+x_i) = \frac{1}{h^2}\left\{V_{i-1}s(s-h) + V_i(s+h)(s-h) + V_{i+1}(s+h)s\right\}$$

$$\beta_1 = \frac{1243}{240}\,V_i^2 + \frac{341}{40}\,V_iV_{i-1} + \frac{341}{40}\,V_iV_{i+1} + \frac{1303}{240}\,V_{i-1}^2 + \frac{261}{40}\,V_{i-1}V_{i+1} + \frac{1303}{240}\,V_{i+1}^2$$

7.1.3 Calcul de β_2

On a

$$\mathbb{P}_{3,i}^{[2]}(x) = V_{i-2}L_0^{[2]}(x) + V_{i-1}L_1^{[2]}(x) + V_iL_2^{[2]}(x)$$

et, en posant $x = x_i + s$,

$$\begin{aligned}
L_0^{[2]}(x) &= L_0^{[2]}(x_i+s) &= \frac{1}{h^2}(s+h)s\\
L_1^{[2]}(x) &= L_1^{[2]}(x_i+s) &= \frac{1}{h^2}(s+2h)s\\
L_2^{[2]}(x) &= L_2^{[2]}(x_i+s) &= \frac{1}{h^2}(s+2h)(s+h)
\end{aligned}$$

ce qui donne,

$$\mathbb{P}_{3,i}^{[1]}(x) = \mathbb{P}_{3,i}^{[1]}(s+x_i) = \frac{1}{h^2}\left\{V_{i-2}(s+h)s + V_{i-1}(s+2h)s + V_i(s+2h)(s+h)\right\}$$

$$\beta_2 = \frac{4423}{240}\,V_i^2 + \frac{881}{40}\,V_iV_{i-1} + \frac{621}{40}\,V_iV_{i-2} + \frac{2083}{240}\,V_{i-1}^2 + \frac{521}{40}\,V_{i-1}V_{i-2} + \frac{1303}{240}\,V_{i-2}^2$$

Références

[Shu97] Chi-Wang Shu. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws. *NASA/ICASE Report*, 65, 1997.