Feuille d'exercices 1

Espaces vectoriels

Exercice 1

Rappeler les axiomes entrant dans la définition d'un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Montrer à l'aide des propriétés de distributivité que si V est un espace vectoriel alors pour tout $\lambda \in k$ et pour tout $v \in V$, on a :

1. $\lambda \cdot 0_V = 0_V$;
2. $0 \cdot v = 0_V$.

En déduire que si $v \in V$, alors $(-1) \cdot v = -v$.

Exercice 2

Parmi les sous-ensembles ci-dessous, déterminez lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

$$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 3x - 2y = z + 1\}$$

$$E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - y = z\}$$

$$E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 = 0\}$$

$$E_4 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ x = y = 2z = 2t\}$$

Exercice 3

Montrer que si E est un espace vectoriel et F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors leur intersection $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

En déduire que

$$E_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 2x + 3y - 5z = 0\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x - y + z = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4

Soit E un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriel de E. Montrer que $F \cup G$ est un espace vectoriel si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.
(indication : pour montrer l'implication $\Rightarrow$ -la plus intéressante- on pourra supposer que F n'est pas inclus dans G, considérer un élément $x \in F$ qui n'est pas dans G et l'utiliser pour montrer qu'alors, $G \subset F$).

Le sous ensemble

$$E_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 2x + 3y - 5z = 0\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x - y + z = 0\}$$

est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

Exercice **5**

On note ici par F le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Déterminez parmi les sous-ensembles suivants, ceux qui forment des sous-espaces vectoriels de F.

$$A = \{f \in F,\ f(1) = 0\},$$

$$B = \{f \in F,\ f(0) = 1\},$$
$$C = \{f \in F,\ f \text{ croissante}\},$$
$$D = \{f \in F,\ f(x) = f(x+1) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}\},$$
$$E = \{f \in F,\ f(x) = f(x+1) - 1 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}\},$$
$$G = \{f \in F,\ f(x) = -f(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}\}$$

.

Exercice **6**

Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$, montrer que soit $E = \{0\}$, soit $E = \mathbb{R}$.
Montrer de même que si E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, alors soit $E = \{0\}$, soit $E = \mathbb{R}^2$, soit E est une droite passant par $(0, 0)$.