Feuille d'exercices 2

Espaces vectoriels

Exercice 1

Soient 3 vecteurs x, y, z linéairement indépendants d'un espace vectoriel E. En est-il de même de $y+z, z+x, x+y$?

Exercice 2

Pour quelles valeurs du réel λ le système suivant forme-t-il une base de $\mathbb{R}^3$?

$$x_1 = (1,2,2), \quad x_2 = (5,6,6), \quad x_3 = (1,1,\lambda).$$

Exercice 3

Soit $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-2z = a\}$, $a \in \mathbb{R}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $a = 0$. Déterminer alors sa dimension et donner en une base.

Exercice 4

On considère E l'ensemble des suites $(u_n, n \in \mathbb{N})$ à valeurs réelles qui vérifient :

$$u_{n+3} - 6u_{n+2} + 11u_{n+1} - 6u_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs réelles.
2. Chercher des éléments de E de la forme $u_n = \lambda^n$, avec λ réel.
3. Trouver une base de E.

Exercice 5

Soit $E_1 = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ et $E_2 = \mathrm{Vect}(w_1, w_2)$ des s.e.v. de $\mathbb{R}^4$ où

$$v_1 = (1,-1,0,1), \quad v_2 = (0,2,1,0), \quad w_1 = (0,6,-1,4), \quad w_2 = (3,3,1,5).$$

1. Déterminer une base de $E_1 \cap E_2$.
2. Donner une base de $E_1 + E_2$.
3. Définir un supplémentaire de $E_1 + E_2$ dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 6

Soit $E = \mathbb{R}_4[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 4.

1. Rappeler l'expression de sa base canonique, et sa dimension.
2. Soit $F = \{P \in E \mid P(1) = 0\}$ et $G = \{P \in E \mid (X^2+1) \text{ divise } P\}$. Vérifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
3. Donner des bases de F, G, $F+G$, $F \cap G$.