Feuille d'exercices 3

Applications linéaires

***Exercice* 1**

Déterminer si les applications suivantes sont linéaires :

1. $f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_1(x, y) = x^2 + y^2 + 1$
2. $f_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f_2(x, y, z) = (2x - y, x + y, x + z)$
3. $f_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f_3(x, y, z) = (xz + y, x + z)$
4. $f_4 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f_4(x, y, z) = (x + 4y, x - y)$

***Solution* 1**

1. L'application f_1 n'est pas linéaire, puisque $f_1((0, 0)) = 1 \neq 0$.

2. L'application f_2 est linéaire :

   — Si $v = (x, y, z)$ et $v' = (x', y', z')$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{aligned} f_2(v + v') = &\ f_2((x + x', y + y', z + z')) \\ = &\ (2(x + x') - (y + y'), (x + x') + (y + y'), (x + x') + z + z')) \\ = &\ (2x - y + 2x' - y', x + y + x' + y', x + z + x' + z') \\ = &\ f_2(v) + f_2(v') \end{aligned}$$

   — De même si $v = (x, y, z)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f_2(\lambda v) = &\ f_2((\lambda x, \lambda y, \lambda z)) \\ = &\ (2(\lambda x) - \lambda y, \lambda x + \lambda y, \lambda x + \lambda z)) \\ = &\ \lambda(2x - y, x + y, x + z) \\ = &\ \lambda f_2((x, y, z)) \end{aligned}$$

3. Le produit "xz" présent dans la formule qui définit f_3 l'empêche d'être une application linéaire. Par exemple on voit que

$$\begin{aligned} f_3(2(1, 1, 1)) = &\ f_3((2, 2, 2)) \\ = &\ (6, 4) \\ \neq &\ 2f_3((1, 1, 1)) = (4, 4) \end{aligned}$$

4. L'application f_4 est linéaire :

   — Si $v = (x, y, z)$ et $v' = (x', y', z')$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{aligned} f_4(v + v') = &\ f_4((x + x', y + y', z + z'))) \\ = &\ ((x + x') + 4(y + y'), (x + x') - (y + y')) \\ = &\ (x + 4y + x' + 4y', x - y + x' - y') \\ = &\ f_4(v) + f_4(v') \end{aligned}$$

— De même si $v = (x, y, z)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f_4(\lambda v) = \;& f_4((\lambda x, \lambda y, \lambda z)) \\ =\;& (\lambda x + 4(\lambda y), \lambda x - \lambda y) \\ =\;& \lambda(x + 4y, x - y) \\ =\;& \lambda f_4((x, y, z)) \end{aligned}$$

***Exercice* 2**

Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$f(e_1) = e_2,\ f(e_2) = e_3,\ f(e_3) = e_1$$

1. Soit v le vecteur de composantes (x, y, z) dans la base $\{e_1, e_2, e_3\}$. Déterminer les composantes de $f(v)$ dans cette même base.
2. Déterminer l'image et le noyau de f.

***Solution* 2**

1. Rappel : la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B} := \{e_1, e_2, e_3\}$ est la matrice dont la j-ième colonne est donnée par les coordonnées de $f(e_j)$ dans $\mathcal{B}$.

   On observe donc les coordonnées des images des éléments de $\mathcal{B}$:

   — $f(e_1) = 0 \cdot e_1 + e_2 + 0 \cdot e_3$
   — $f(e_2) = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + e_3$
   — $f(e_3) = e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$

   Si bien que
   $$Mat(f)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. — f est clairement surjective, puisque tous les éléments de la base $\mathcal{B}$ appartiennent à l'image de f. Plus précisément, si $v = \alpha \cdot e_1 + \beta \cdot e_2 + \gamma \cdot e_3$ est un élément de $\mathbb{R}^3$, alors
   $$v = \alpha \cdot e_1 + \beta \cdot e_2 + \gamma \cdot e_3 = \alpha \cdot f(e_3) + \beta \cdot f(e_1) + \gamma \cdot f(e_2)$$
   et donc $v = f(\alpha \cdot e_3 + \beta \cdot e_1 + \gamma \cdot e_2)$. et $Im(f) = \mathbb{R}^3$.

   — f est aussi injective : si $v = \alpha \cdot e_1 + \beta \cdot e_2 + \gamma \cdot e_3$ est dans le noyau de f, alors
   $$f(v) = f(\alpha \cdot e_1 + \beta \cdot e_2 + \gamma \cdot e_3) = \alpha \cdot e_2 + \beta \cdot e_3 + \gamma \cdot e_1 = 0_{\mathbb{R}^3}.$$
   Puisque $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base, cela implique que $\alpha = \beta = \gamma = 0$ et donc que v est nul, ainsi $\ker(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

***Exercice* 3**

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par $f(x, y, z) = (x - 2y, 6y - 3x)$.

1. Montrer que f est linéaire
2. Trouver une base de $\ker(f)$

3. Trouver une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Déterminer si f est injective, surjective et/ou bijective.

Solution 3

1. L'application f est bien linéaire :

— si $v = (x, y, z)$ et $v' = (x', y', z')$ sont veux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{aligned} f(v+v') &= f((x+x', y+y', z+z')) \\ &= ((x+x') - 2(y+y'), 6(y+y') - 3(x+x')) \\ &= (x - 2y + x' - 2y', 6y - 3x + 6y' - 3x') \\ &= f(v) + f(v') \end{aligned}$$

— De même si $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(\lambda v) &= f((\lambda x, \lambda y, \lambda z)) \\ &= (\lambda x - 2(\lambda y), 6(\lambda y) - 3(\lambda x)) \\ &= \lambda(x - 2y, 6y - 3x) \\ &= \lambda f(v) \end{aligned}$$

2. Pour déterminer des bases à l'image et au noyau de f, on applique l'algorithme du cours qui fournit les deux par réduction de Gauss sur les colonnes de $Mat(f)_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$, où $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{C} = \{f_1, f_2\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

On a :
— $f(e_1) = f((1, 0, 0)) = (1, -3) = f_1 - 3f_2$.
— $f(e_2) = f((0, 1, 0)) = (-2, 6) = -2f_1 + 6f_2$.
— $f(e_3) = f((0, 0, 1)) = (0, 0) = 0f_1 + 0f_2$.

On a donc

$$Mat(f)_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Reste à appliquer l'algorithme du cours. Comme la matrice $Mat(f)_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ a trois *colonnes*, on lui accole une matrice identité de taille 3 et on remercie Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{1}$$

L'algorithme s'arrête déjà puisque la matrice de gauche est triangulaire inférieure (l'exemple est ici très simple). D'après le cours on sait donc qu'une base de l'image de f est donnée par les colonnes non-nulles de la matrice de gauche finale, et qu'une base de son noyau est obtenue grâce à la matrice finale de droite, en considérant les colonnes correspondant aux colonnes nulles de celle de gauche (ici les colonnes 2 et 3).

Une base de $Im(f)$ est ainsi donnée par $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$ tandis qu'une base de $\ker(f)$ est donnée par les vecteurs $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.