Feuille d'exercices 4

Opérations de Gauss, applications

***Exercice* 1**

Soient V et W des espaces vectoriels de dimension finie, ainsi qu'une application $f : V \longrightarrow W$ qui est linéaire.

1. Si V et W sont de même dimension, montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   a) f est injective ;
   b) f est surjective ;
   c) f est bijective.
2. Montrer que les conditions de 1. ne sont pas équivalentes lorsque V et W ne sont pas de même dimension.

***Solution* 1**

1. C'est une conséquence direct du théorème du rang. Bien entendu par définition de la bijectivité, on a $c) \Rightarrow a)$.
   Supposons que f soit injective. La formule du théorème du rang est la suivante
   $$\dim(V) = \dim(\ker(f)) + \dim(Im(f)).$$
   Dire que f est injective revient à dire que $\ker(f) = \{0_V\}$; autrement dit que $\dim(\ker(f)) = 0$ sous cette hypothèse, l'égalité du théorème du rang donne donc $\dim(V) = \dim(Im(f))$, autrement dit que f est surjective.

   L'implication $b) \Rightarrow c)$ est similaire : si f est surjective, alors $Im(f) = V$ et donc $\dim(Im(f)) = \dim(V)$. Ainsi l'égalité ci-dessis indique que $\dim(\ker(f)) = 0$, c'est à dire que $\ker(f) = \{0_V\}$ et f est injective, donc bijective.
2. L'application $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ donné par $(x, y) \longmapsto (x, y, 0)$ est clairement injective mais pas surjective. De même celle $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $(x, y, z) \longmapsto (x, y)$ est surjective masi pas injective.

***Exercice* 2**

Pour chacune des applications ci-dessous, déterminer une base de leur noyau et de leur image.

1. $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x, 0, 0)$;
2. $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (z, x, 0)$;
3. $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x, 2x)$.

***Solution* 2**

Même si les applications sont très simples, je vais pour chacune appliquer "bêtement" l'algorithme de Gauss pour que vous le voyiez un maximum en pratique.

1. La matrice de l'application f dans la base canonique est donnée par

$$Mat(f)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice est donc déjà échelonnée et il n'y a rien à faire : l'image de f est engendrée par les colonnes de $Mat(f)_{\mathcal{B}}$, une base en est donc donnée par $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

On sait par le théorème du rang que la dimension de $\ker(f)$ est 2 et bien entendu, les vecteurs $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ lui appartiennent. Comme ce sont deux vecteurs libres, ils en forment donc une base.

2. La matrice de l'application g dans la base canonique est donnée par

$$Mat(g)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Appliquons l'algorithme de Gauss. La réduction de Gauss de la matrice chemine ainsi :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

L'algorithme s'arrête puisque la matrice de gauche est échelonnée, les colonnes non-nulles de gauche composent une base de l'image de g, tandis que les colonnes de droite associées aux colones nulles à gauche donnent une base du noyau :

$$\text{Base de } Im(f) : \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad \text{Base de } \ker(f) : \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

3. $$Mat(h)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

A nouveau il n'y a rien à faire, on peut obtenir directement des bases à l'image et au noyau de h :

$$\text{Base de } Im(h) : \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \qquad \text{Base de } \ker(h) : \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Exercice 3

On considère $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z, t) = (x+2y+z+t, 2x+4y+3z+t, x+2y+2t)$.

1. Montrer que f est une application linéaire et expliquer pourquoi f ne peut pas être bijective ;
2. Ecrire la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$;

3. Déterminer des bases du noyau et de l'image de f. L'application f est-elle injective ? surjective ?

Solution 3

1. Montrer que f est linéaire est direct, de la même manière que pour les applications de la feuille précédente. L'application f n'est clairement pas bijective : si c'était le cas on aurait un isomorphisme entre $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$, ce qui n'est pas possible car ils ne sont pas de même dimension.
2. La matrice de l'application f dans la base canonique est donnée par

$$Mat(f)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On applique l'algorithme du cours, en oubliant pas que comme la matrice a ici 4 colonnes, on lui accole bien une matrice identité de taille 4.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\longrightarrow}{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \\ C_4 \leftarrow C_4 - C_1}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\longrightarrow}{C_4 \leftarrow C_4 + C_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\longrightarrow}{C_2 \leftrightarrow C_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Une base de l'image de h est donc donnée par $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ tandis qu'une base du noyau est donnée par $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Exercice 4

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la suivante :

$$Mat(f)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer explicitement l'image d'un vecteur (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ par f.
2. A l'aide des opérations de Gauss, déterminer des bases du noyau de f et de son image.
3. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Solution 4

1. L'image du vecteur (x, y, z) est donnée par

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+2y+z\\ 2x+3y+2z\\ x+y+z\end{pmatrix}.$$

2. On applique l'algorithme de Gauss à la matrice de f :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1\\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1\\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

L'algorithme s'arrête puisque la matrice de gauche est échelonnée, une base de l'image de f est donc $\left\{\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ -1\\ -1\end{pmatrix}\right\}$ tandis qu'une base du noyau est donnée par $\left\{\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right\}$.

Exercice 5

A l'aide des opérations de Gauss, calculer les inverses des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix}2 & 7 & 3\\ 3 & 9 & 4\\ 1 & 5 & 3\end{pmatrix} \quad ; \quad D = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 4\\ 5 & 6 & 0\end{pmatrix}$$

Solution 5

Comme vu dans le cours, l'algorithme d'inversion des matrices est rigoureusement le même que celui qui permet d'obtenir des bases aux images et aux noyaux des applications linéaires. Il s'agit juste de "continuer" jusqu'à ce que la matrice de gauche devienne l'identité, et bien sûr de se limiter au cas des matrices carrées.

1. Inverse de A :

$$\left(\begin{array}{cc|cc}2 & 3 & 1 & 0\\ 4 & 5 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{C_1 \leftarrow C_1/2} \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 3 & \frac{1}{2} & 0\\ 2 & 5 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{C_2 \leftarrow C_2 - 3C_1} \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\\ 2 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{C_2 \leftarrow -C_2} \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ 2 & 1 & 0 & -1\end{array}\right) \xrightarrow{C_1 \leftarrow C_1 - 2C_2} \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & 2 & -1\end{array}\right)$$

On a donc $A^{-1} = \begin{pmatrix}-\frac{5}{2} & \frac{3}{2}\\ 2 & -1\end{pmatrix}$

2. Inverse de B :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1\\ C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2\\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{C_3 \leftarrow C_3 + C_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -4 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{C_3 \leftarrow -C_3/4} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3/4\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1/4\\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1/4\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[C_1 \leftarrow C_1 - 2C_3]{C_2 \leftarrow C_2 + C_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & -1/4 & 3/4 \\ 1 & 1 & 0 & 1/2 & 3/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/4 & -1/4 \end{array}\right) \xrightarrow{C_1 \leftarrow C_1 - C_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/4 & -1/4 & 3/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{array}\right)$$

On a donc $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 & 3/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$

3. Inverse de C :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 7 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_2 \leftarrow C_2 - 3C_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1]{C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 7 & 9 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{C_3 \leftarrow C_3 - C_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{C_3 \leftarrow C_3 - 3C_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{C_3 \leftrightarrow -C_3/3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1/3 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{C_1 \leftarrow C_1 - 2C_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7/3 & 2 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 5/3 & -1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

On a donc $C^{-1} = \begin{pmatrix} -7/3 & 2 & -1/3 \\ 5/3 & -1 & -1/3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Inverse de D :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1]{C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & -15 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{C_3 \leftarrow C_3 - 4C_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[C_1 \leftarrow C_1 - 5C_3]{C_2 \leftarrow C_2 + 4C_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -24 & 18 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

On a donc $C^{-1} = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.