Feuille d'exercices 5

Déterminants

Exercice 1

Vérifier la formule $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ avec les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

Solution 2

On a $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 4 - 1 \times 3 = 5$ et $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -2 \times 1 - 5 \times 1 = -7$.

On calcule simplement :

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -4 \\ 21 & -7 \end{pmatrix}$$

et on observe qu'on a bien $\begin{vmatrix} 17 & -4 \\ 21 & -7 \end{vmatrix} = 17 \times -7 - 21 \times -4 = -35$

Exercice 2

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice de taille n. Exprimer en fonction de $\det(A)$ les réels $\det(-A)$ et $\det(3A)$.

Solution 3

Nous l'avons vu en cours, si A est une matrice de taille n, alors si λ est un réel, on obtient la matrice λA à partir de A en faisant les n opérations de Gauss $C_1 \leftarrow \lambda C_1$,..., $C_n \leftarrow \lambda C_n$. On a donc $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ et ainsi

$$\det(-A) = (-1)^n \det(A) \quad \text{\textit{et}} \quad \det(3A) = 3^n \det(A)$$

Exercice 3

Prouver que si A et B sont deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$, alors $\det(AB) = \det(BA)$. Montrer que si A est une matrice inversible, alors $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Solution 4

Il s'agit ici juste d'utiliser le fait que le déterminant se comporte bien avec la multiplication matricielle et que les nombres réels sont bien plus sympa que les matrices lorsqu'on veut les multiplier :

1. On a $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(B)\det(A) = \det(BA)$.
2. Si A est inversible, on a $\det(AA^{-1}) = \det(I_n) = 1$, on a donc bien $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$ et
$$\det(A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}.$$

***Exercice* 4**

Calculer les déterminants des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & c & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{avec } c \in \mathbb{R})$$

***Solution* 5**

1. Je rédige de manière poussive ce premier exemple pour la science :
   L'oeil affûté tel le renard, je remarque que la 3-ème ligne de A comporte beaucoup de 0, je développe donc le déterminant par rapport à cette ligne car cela simplifie grandement les calculs.
   Le développement donné en cours nous donne
   $$\det(A) = 0. \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - 0. \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 1. \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$$
2. Ici pas de ligne plus simple que les autres, développement par rapport à la première ligne :
   $$\det(B) = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 5 + 1 = 2.$$
3. Je développe par rapport à la première ligne :
   $$\det(C) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - c + 1 = 3 - c.$$

***Exercice* 5**

Montrer l'égalité suivante.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 11 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

***Solution* 6**

On voit que la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 11 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est obtenue à partir de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ en faisant les opérations de Gauss sur les colonnes $C_1 \leftrightarrow C_2$, puis $C_3 \leftarrow C_3 + C_1$ puis $C_3 \leftarrow C_3 + C_2$. LEs deux dernières opérations ne changent rien au déterminant, tandis que la première le multiplie par -1, d'où le fait que

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 11 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

***Exercice* 6**

Soit A une matrice *nilpotente* (c'est-à-dire qu'il existe un entier positif k tel que A^k est la matrice nulle).

1. Que vaut $\det(A)$? En déduire que A n'est pas inversible.
2. Retrouver le fait que A n'est pas inversible sans utiliser le déterminant.

Solution 7

1. La matrice A^k est la matrice nulle, on a donc
$$0 = \det(A^k) = \det(A) \times ... \times \det(A)$$
ce qui implique que $\det(A) = 0$. La matrice n'est ainsi pas inversible d'après le cours.
2. Si A est nilpotente et inversible à la fois, on a $A^k = 0$ et il existe une matrice B telle que $AB = I_n$. Cela n'est pas possible, puisque dans ce cas, on a à la fois $A^k B^k = 0$ (car $A^k = 0$) mais aussi
$$A^k B^k = A^{k-1}(AB)B^{k-1} = A^{k-1} I_n B^{k-1} = A^{k-1} B^{k-1} = ... = I_n$$
et bien sûr, on a pas $I_n = 0$.

Exercice 7

Montrer que les matrices suivantes sont inversibles et déterminer leurs inverse avec la méthode de Gauss.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution 8

Après avoir vérifié que ces matrices sont inversibles en calculant leur déterminant, on applique l'algorithme de Gauss pour trouver l'inverse de ces matrices par réduction sur les colonnes.

1. On a $\det(A) = -2 \neq 0$, donc la matrice est inversible. Par suite
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_2 \leftarrow -C_2/2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1/2 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{C_1 \leftarrow C_1 - 3C_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right)$$
L'inverse de la matrice A est donc donné par la matrice
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$
2. On a $\det(B) = 6 \neq 0$, B est donc inversible.
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1]{C_2 \leftarrow C_2 - C_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{C_3 \leftarrow C_3 + C_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[C_3 \leftarrow C_3/3]{C_2 \leftarrow C_2/2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1/3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{C_2 \leftarrow C_2 - C_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1/6 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & 1/3 \end{array}\right) \xrightarrow{C_1 \leftarrow C_1 - 2C_2/2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 1/6 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & -1/3 & 1/3 \end{array}\right)$$

L'inverse de la matrice B est donc donné par la matrice

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1 \\ -1/3 & 1/6 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

3. On a $\det(C) = -3 \neq 0$, C est donc inversible.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[C_3 \leftarrow C_3 - 4C_1]{C_2 \leftarrow C_2 + C_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & 1 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{C_3 \leftarrow C_3 + 9C_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[C_3 \leftarrow -C_3/3]{C_2 \leftarrow -C_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/3 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -5/3 \end{array}\right) \xrightarrow{C_1 \leftarrow C_1 - C_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & -1/3 \\ -2 & 1 & 0 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 8/3 & -1 & -5/3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{C_1 \leftarrow C_1 + 2C_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & -1 & -5/3 \end{array}\right)$$

L'inverse de la matrice C est donc donné par la matrice

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & -1/3 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2/3 & -1 & -5/3 \end{pmatrix}.$$