Feuille d'exercices 6

Déterminant et diagonalisation

Exercice 1

Vérifier la formule $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ avec les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

Solution 1

On a $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 4 - 1 \times 3 = 5$ et $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -2 \times 1 - 5 \times 1 = -7$.

On calcule simplement :

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -4 \\ 21 & -7 \end{pmatrix}$$

et on observe qu'on a bien $\begin{vmatrix} 17 & -4 \\ 21 & -7 \end{vmatrix} = 17 \times -7 - 21 \times -4 = -35$

Exercice 2

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice de taille n. Exprimer en fonction de $\det(A)$ les réels $\det(-A)$ et $\det(3A)$.

Solution 2

Nous l'avons vu en cours, si A est une matrice de taille n, alors si λ est un réel, on obtient la matrice λA à partir de A en faisant les n opérations de Gauss $C_1 \leftarrow \lambda C_1$,..., $C_n \leftarrow \lambda C_n$. On a donc $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ et ainsi

$$\det(-A) = (-1)^n \det(A) \quad \textit{et} \quad \det(3A) = 3^n \det(A)$$

Exercice 3

Prouver que si A et B sont deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$, alors $\det(AB) = \det(BA)$. Montrer que si A est une matrice inversible, alors $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Solution 3

Il s'agit ici juste d'utiliser le fait que le déterminant se comporte bien avec la multiplication matricielle et que les nombres réels sont bien plus sympa que les matrices lorsqu'on veut les multiplier :

1. On a $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(B)\det(A) = \det(BA)$.
2. Si A est inversible, on a $\det(AA^{-1}) = \det(I_n) = 1$, on a donc bien $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$ et

$$\det(A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}.$$

***Exercice* 4**

Montrer l'égalité suivante.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 11 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

***Solution* 4**

On voit que la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 11 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est obtenue à partir de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ en faisant les opérations de Gauss sur les colonnes $C_1 \leftrightarrow C_2$, puis $C_3 \leftarrow C_3 + C_1$ puis $C_3 \leftarrow C_3 + C_2$. LEs deux dernières opérations ne changent rien au déterminant, tandis que la première le multiplie par -1, d'où le fait que

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 11 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

***Exercice* 5**

Soit A une matrice *nilpotente* (c'est-à-dire qu'il existe un entier positif k tel que A^k est la matrice nulle).

1. Que vaut $\det(A)$? En déduire que A n'est pas inversible.
2. Retrouver le fait que A n'est pas inversible sans utiliser le déterminant.

***Solution* 5**

1. La matrice A^k est la matrice nulle, on a donc

   $$0 = \det(A^k) = \det(A) \times ... \times \det(A)$$

   ce qui implique que $\det(A) = 0$. La matrice n'est ainsi pas inversible d'après le cours.
2. Si A est nilpotente et inversible à la fois, on a $A^k = 0$ et il existe une matrice B telle que $AB = I_n$. Cela n'est pas possible, puisque dans ce cas, on a à la fois $A^kB^k = 0$ (car $A^k = 0$) mais aussi

   $$A^kB^k = A^{k-1}(AB)B^{k-1} = A^{k-1}I_nB^{k-1} = A^{k-1}B^{k-1} = ... = I_n$$

   et bien sûr, on a pas $I_n = 0$.

***Exercice* 6**

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par $f : (x, y, z) \mapsto (3x - z, 2x + 4y + 2z, -x + 3z)$.

1. Déterminer la matrice $A = Mat(f)_{\mathcal{B}}$ de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le polynôme caractéristique de f. En déduire les valeurs propres de f.
3. Déterminer une base pour chaque espace propre de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
4. Trouver une matrice P telle que $A = PDP^{-1}$, où D est une matrice diagonale que l'on explicitera.

5. Déterminer la matrice A^n, pour tout $n \geq 1$.

***Solution* 6**

1. La matrice de l'endomorphisme f dans la base canonique est donnée par
$$Mat(f)_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Le polynôme caractéristique de f est celui associé à la matrice A :
$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}.$$
Je développe ce déterminant par rapport à la deuxième colonne, puisqu'elle contient un maximum de termes nuls. On a donc
$$p_A(\lambda) = (4-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)((3-\lambda)^2 - 1).$$
On a pas d'autre choix que de développer la parenthèse pour en trouver les racines, ce qui donne
$$p_A(\lambda) = (4-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 8).$$
Le polynôme $\lambda^2 - 6\lambda + 8$ est de degré 2, on sait donc facilement trouver ses racines en en calculant le discriminant et on obtient les deux racines 4 et 2, autrement dit
$$p_A(\lambda) = -(\lambda - 4)^2(\lambda - 2).$$

3. On rappelle que les espaces propres de A, notés E_λ où λ est une valeur propre de A, sont simplement définis par
$$E_\lambda = \ker(A - \lambda I_3).$$
Il s'agit donc simplement ici de déterminer des bases pour des noyaux, ce que l'on sait parfaitement faire avec la méthode de Gauss ou par résolution d'un système.
— Base de $E_2 = \ker(A - 2I_3)$:
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_3 \leftarrow C_3 + C_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{C_3 \leftarrow C_3 - 2C_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
Une base de E_2 est donc donnée par $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

— Base de $E_4 = \ker(A - 4I_3)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{C_3 \leftarrow C_3 - C_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Une base de E_4 est donc donnée par $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

On a donc $\dim(E_2) + \dim(E_4) = 3$ et A est diagonalisable.

4. Notons

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice de passage obtenue grâce aux vecteurs de la question précédente. Le cours assure que l'on a alors

$$A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

5. Pour toute matrice B et pour tout entier n, on a toujours

$$(PBP^{-1})^n = PB(P^{-1}P)BP^{-1}...PB(P^{-1}P)BP^{-1} = PB^nP^{-1}.$$

On a donc pour tout entier n

$$A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}.$$

On calcule donc l'inverse de P avec la méthode de Gauss par exemple et on trouve

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

On calcule donc

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2^n + 1 & 0 & 1 - 2^n \\ 2(2^n - 1) & 2^{n+1} & 2(2^n - 1) \\ 1 - 2^n & 0 & 2^n + 1 \end{pmatrix}$$

Ne vous inquiétez pas si vous ne trouvez pas le même résultat, on ne vous demandera pas à l'examen de faire des calculs aussi lourds... L'important est que vous compreniez la méthode.

Exercice 7

Diagonaliser les matrices suivantes, lorsque cela est possible.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution 7

— Matrice A.

On commence par calculer le polynôme caractéristique de A. On pourrait le simplifier en faisant les opérations $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$ puis $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ mais faisons comme si nous n'avions pas cette astuce en tête et développons le "bêtement".

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

On a donc en développement par rapport à la première ligne disons,

$$p_A(\lambda) = (-1-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1-\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

et donc on obtient en un temps fini $p_A(\lambda) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4$. Arrivé à ce point, on remarque que 1 est une racine évidente et donc le polynôme $p_A(\lambda)$ est divisible par $\lambda - 1$. Pour trouver les autres racines du polynôme, on effectue donc sa division euclidienne par $\lambda - 1$:

$$\begin{array}{rr|l} & -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 & \lambda - 1 \\ \cline{3-3} - & -\lambda^3 \quad +\lambda^2 & -\lambda^2 - 4\lambda - 4 \\ \cline{2-2} & -4\lambda^2 \quad +4 & \\ - & -4\lambda^2 + 4\lambda & \\ \cline{2-2} & -4\lambda \quad +4 & \\ - & -4\lambda \quad +4 & \\ \cline{2-2} & 0 & \end{array}$$

On a donc montré que $p_A(\lambda) = (\lambda - 1)(-\lambda^2 - 4\lambda - 4)$ et il reste à trouver les racines du polynôme de la seconde parenthèse qui est de degré 2. Lucidité ou discriminant, vous trouvez que -2 en est une racine double et donc

$$p_A(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$$

Les valeurs propres de A sont donc 1 et -2, on calcule les espaces propres associés. Pour E_1 on trouve une base à $\ker(A - I_3)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{C_3 \leftrightarrow C_3 + C_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Une base de E_1 est donc donnée par $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

De même pour E_{-2}, on trouve une base à $\ker(A+2I_3)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

et une base de E_{-2} est donc donnée par $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

On a donc $\dim(E_1)+\dim(E_{-2}) = 3$ et A est diagonalisable et le cours assure que si l'on pose la matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

alors on a

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

— Matrice B.

On commence par calculer le polynôme caractéristique de B. On trouve

$$p_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 3.$$

A nouveau, on remarque que 1 est une solution évidente de $p_B(\lambda)$, on effectue donc sa division euclidienne par $\lambda - 1$.

$$\begin{array}{rr|l} & -\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 3 & \lambda - 1 \\ \cline{3-3} - & -\lambda^3 + \lambda^2 \phantom{{}+\lambda-3} & -\lambda^2 + 2\lambda + 3 \\ \cline{2-2} & 2\lambda^2 + \lambda - 3 & \\ - & 2\lambda^2 - 2\lambda \phantom{{}-3} & \\ \cline{2-2} & 3\lambda - 3 & \\ - & 3\lambda - 3 & \\ \cline{2-2} & 0 & \end{array}$$

On a donc

$$p_B(\lambda) = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 2\lambda + 3)$$

et on calcule le discriminant du polynôme $-\lambda^2 + 2\lambda + 3$ pour trouver ses racines 3 et -1, le polynôme caractéristique de B s'écrit donc

$$p_B(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 3).$$

La matrice B a 3 valeurs propres distinctes, on sait donc déjà d'après le cours qu'elle est diagonalisable. Calculons tout de même les espaces propres assocés aux trois valeurs propres de B. On commence par E_1.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{C_2 \leftarrow C_2 + C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

et une base de E_1 est donc donnée par $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

De même pour E_{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{C_2 \leftarrow C_2 + 3C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 + C_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

et une base de E_{-1} est donc donnée par $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

De même pour E_3.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 + C_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

et une base de E_3 est donc donnée par $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

En considérant donc la matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

le cours assure que l'on a

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}$$

***Exercice* 8**

Diagonaliser les matrices A suivantes. En déduire les valeurs de A^7.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

***Solution* 8**

— En développant le déterminant par rapport à la seconde ligne, on trouve facilement que

$$p_A(\lambda) = -(\lambda - 2)(\lambda + 2)^2.$$

On commence par déterminer l'espace propre E_2. On sait déjà qu'il est de dimension 1 par le cours, car la multiplicité algébrique de 2 dans p_A vaut 1. Il suffit donc de trouver un vecteur non nul dans E_2 pour en avoir une base, mais faire l'algorithme bêtement n'est pas bien plus long.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_3 \leftarrow C_3 + C_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

On a donc que $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de E_2.

On passe à E_{-2}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - 3C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Une base de E_{-2} est donc donnée par $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Le cours permet donc d'affirmer qu'en considérant la matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on a alors

$$A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Même procédure pour B. On trouve

$$p_B(\lambda) = -\lambda^3 + 13\lambda - 12.$$

On observe que 1 est une racine évidente, et on passe donc à la division euclidienne du polynôme par $\lambda - 1$.

$$\begin{array}{rr|l} & -\lambda^3 \quad +13\lambda-12 & \lambda - 1 \\ \cline{3-3} - & -\lambda^3+\lambda^2 \qquad\qquad & -\lambda^2 - \lambda + 12 \\ \cline{2-2} & -\lambda^2+13\lambda-12 & \\ - & -\lambda^2 \quad +\lambda \qquad & \\ \cline{2-2} & 12\lambda-12 & \\ - & 12\lambda-12 & \\ \cline{2-2} & 0 & \end{array}$$

On a donc
$$p_B(\lambda) = (\lambda - 1)(-\lambda^2 - \lambda + 12).$$
et on trouve facilement que la seconde parenthèse a pour racines 3 et -4, on a donc
$$p_B(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda + 4).$$

La matrice est donc diagonalisable car elle a trois valeurs propres distinctes et on détermine les espaces propres rapidement, avant d'être définitivement ravagés par ces calculs. On a pour E_1
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{C_2 \leftarrow C_2 + 3C_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

Une base de E_1 est donc donnée par $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$.

De même pour E_3.
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_2 \leftarrow C_2 + C_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{C_3 \leftrightarrow C_3 - C_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -3 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Une base de E_3 est donc donnée par $\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

De même pour E_{-4}.
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_2 \leftarrow 2C_2 - C_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_2 \leftarrow C_2 - 5C_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 6 & 0 \\ 5 & -2 & -1 & 2 & -10 & 0 \\ -2 & 10 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{C_3 \leftarrow 2C_3 - C_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 6 & 6 \\ 5 & -2 & 0 & 2 & -10 & -10 \\ -2 & 10 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Une base de E_{-4} est donc donnée par $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Le cours permet donc d'affirmer qu'en considérant la matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & -5 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

on a alors

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

***Exercice* 9**

Déterminer pour quelles valeurs des réels a, b et c la matrice A suivante est diagonalisable :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

***Solution* 9**

On remarque déjà que si $c = 1$, alors la matrice n'est pas diagonalisable.

Supposons en effet par l'absurde que c vaille 1. Le polynôme caractéristique $p_A(\lambda)$ vaut bien évidemment $(\lambda - 1)^3$, autrement dit 1 est la seule valeur propre de A. Mais si A était diagonalisable, on aurait alors l'existence d'une matrice P inversible telle que

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = I_3,$$

or A n'est pas l'identité.

On suppose désormais que $c \neq 1$. On sait d'après le cours que l'espace propre E_c est de dimension 1 car le polynôme caractéristique de la matrice est

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - c)$$

et la dimension de E_c est inférieure à sa multiplicité algébrique. La matrice A est donc diagonalisable si et seulement si $\dim(E_1) + \dim(E_c) = 3$, c'est à dire si $\dim(E_1) = 2$. Maintenant, on remarque que la matrice $A - I_3$ s'écrit de manière très simple

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c-1 \end{pmatrix}$$

et calculer son noyau E_1 est aisé : comme $c-1$ n'est pas nul il est de dimension 2 si et seulement si a est nul.

On peut donc conclure : la matrice A est diagonalisable si et seulement si $c \neq 1$ et $a \neq 0$.