Feuille d'exercices 7

Espaces Euclidiens

Exercice 1

Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique et de la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

1. Déterminer une base orthonormale du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ donné par les équations

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z + t = 0 \end{cases}$$

2. On note F le sous-espace de la question précédente. Donner la matrice de la projection orthogonale p_F sur le sous-espace vectoriel F, dans la base canonique.

Solution

1. On trouve comme base $\mathcal{C} = \{(1, -1, 0, 0); (0, 0, 1, -1)\}$ qui est clairement orthogonale, on prend donc comme base orthonormale obtenue en normalisant tout simplement les deux vecteurs :

$$\mathcal{D} = \{\underbrace{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, 0)}_{x}; \underbrace{(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})}_{y}\}$$

2. La formule de la projection est donnée par

$$p_F(v) = < v, x > x + < v, y > y$$

et donc il n'y a qu'à calculer les valeurs pour les vecteurs de la base canonique, on obtient

$$Mat_{p_F} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique et soient f et g deux endomorphismes symétriques de E.

1. Montrer que $ker(f)$ et $Im(f)$ sont des supplémentaires orthogonaux, c'est à dire que

$$ker(f) \oplus^{\perp} Im(f) = E.$$

2. Montrer que $g \circ f$ est symétrique si et seulement si $f \circ g = g \circ f$.

Solution

1. On montre déjà qu'ils sont orthogonaux : si $x \in ker(f)$ et $f(z) = y \in Im(f)$, on a
$$< x, y >=< x, f(z) >=< f(x), z >=< 0, z >= 0$$
Il reste à montrer que noyaux et images sont supplémentaires, mais c'est évident par le théorème du rang qui stipule que $dim(E) = dim(ker(f)) + dim(Im(f))$.
2. Comme f et g sont symétriques, on a pour tout couple $(x, y) \in E^2$,
$$< g \circ f(x), y >=< f(x), g(y) >=< x, f \circ g(y) >$$
il va donc de soi que si $f \circ g = g \circ f$, alors $g \circ f$ est symétrique.
Réciproquement si $g \circ f$ est symétrique, on a pour tout $(x, y) \in E^2$
$$< x, g \circ f(y) >=< x, f \circ g(y) >$$
autrement dit si on fixe un y, on a pour tout x, $< x, g \circ f(y) - f \circ g(y) >= 0$, ce qui implique que $g \circ f(y) - f \circ g(y) = 0$ et donc on a bien $g \circ f(y) = f \circ g(y)$. Comme la remarque vaut pour tout y, on a bien $g \circ f = f \circ g$.

Exercice 3

Soit E un espace Euclidien muni d'un produit scalaire $< ., . >$ et $f : E \longrightarrow E$ une "application symétrique", c'est que à dire que pour tout couple $(x, y) \in E^2$, on a
$$< f(x), y >=< x, f(y) > .$$
Montrer que f est nécessairement une application linéaire (donc un endomorphisme symétrique).

Indice : calculer pour $(x, y, z) \in E^3$ la valeur de $< f(x + y) - f(x) - f(y), z >$

Solution

Montrer que $f(x+y) = f(x)+f(y)$ revient à montrer que $f(x+y)-f(x)-f(y) = 0$, c'est à dire que $f(x + y) - f(x) - f(y)$ est orthogonal à tout vecteur de E.

On calcule :
$$< f(x + y) - f(x) - f(y), z >=< f(x + y), z > - < f(x), z > - < f(y), z >$$
$$=< x + y, f(z) > - < x, f(z) > - < y, f(z) >=< x + y - x - y, f(z) >= 0$$
La même chose pour montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Exercice 4

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice.

1. Montrer que la matrice ${}^tAA$ est symétrique et en déduire qu'elle est diagonalisable.
2. Montrer que si X est un vecteur propre de ${}^tAA$ associé à une valeur propre λ, on a
$$ {}^t(AX)AX = \lambda {}^tXX $$
3. En déduire que les valeurs propres de A sont positives.

Solution

1. On a
$$ {}^t({}^tAA) = {}^tA\ {}^t({}^tA) = {}^tAA $$
donc cette matrice est symétrique et d'après le cours elle est diagonalisable.
2. Si λ est une valeur propre associée à ${}^tAA$, on a
$$ {}^t(AX)AX = {}^tX{}^tAAX = {}^tX(\lambda X) = \lambda {}^tXX $$
.
3. On a donc par la question précédente $\lambda = \frac{{}^t(AX)AX}{{}^tXX} = \frac{\|AX\|^2}{\|X\|^2}$ est un nombre positif.

Exercice 5

Soient a_1, a_2,..., a_n des réels positifs.

1. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs $X = (a_1, ..., a_n)$ et $Y = (1, ..., 1)$, montrer que
$$ \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n a_i^2 $$
2. Etudier le cas d'égalité
3. De même, en supposant que les a_i sont strictement positifs et tels que $a_1 + ... + a_n = 1$, montrer que
$$ n^2 \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}. $$
4. Etudier pour ce deuxième exemple le cas d'égalité.

Solution

1. On applique simplement la formule :
$$ < X, Y > \leq \|X\| \|Y\| $$
On a donc
$$ \sum_{i=1}^n a_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n 1^2\right)^{\frac{1}{2}} $$
ce qui donne bien une fois l'inégalité mise au carré
$$ \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n a_i^2. $$

2. Le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz correspond au cas où X et Y sont liés, c'est à dire lorsque tous les a_i sont égaux.
3. Cette fois on prend $X = (\sqrt{a_1}, ..., \sqrt{a_n})$ et $Y = (\frac{1}{\sqrt{a_1}}, ..., \frac{1}{\sqrt{a_n}})$. On a alors par Cauchy-Schwarz
$$< X, Y >= n \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \right)^{\frac{1}{2}}$$
et il ne reste qu'à mettre au carré.
4. A nouveau, égalité lorsque X et Y sont liés, c'est à dire qu'il existe un λ réel tel que pour tout i, on ait
$$\sqrt{a_i} = \frac{\lambda}{\sqrt{a_i}},$$
c'est à dire que tous les a_i sont égaux à λ. Sauf que par hypothèse, on a deplus que $a_1 + ... + a_n = 1$, donc nécessairement les a_i sont tous égaux à $\frac{1}{n}$.

Exercice 6

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scallaire canonique et f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique est la suivante :
$$A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Donner une base du noyau et de l'image de f.
2. En déduire que f est une projection orthogonale.

Solution

1. Avec les calculs qu'on a fait assez de fois montrent que $ker(f) = Vect\{(-1, -2, 1)\}$, et $Im(f) = Vect\{(5, -2, 1), (-2, 2, 2)\}$.
2. Démontrer que f est une projection orthogonale, c'est démontrer que $ker(f)$ et $Im(f)$ sont orthogonaux, et on vérifie en effet que $(-1, -2, -1)$ est orthogonal aux deux vecteurs de base de $Im(f)$.

Exercice 7

Soit $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré plus petit que 2.

1. Montrer que la formule
$$< P, Q >:= \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx$$
définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Construire une base orthonormale pour ce produite scalaire, à partir de la base canonique $\{1, X, X^2\}$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

Solution

1. La formule définit bien un produit scalaire :
   — C'est évidemment une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}_2[X]$, par linéarité de l'intégrale ;
   — Elle est définie car si $< P, P >= 0$, on a
   $$\int_{-1}^{1} P^2(x)dx = 0,$$
   donc $P^2 = 0$ une fonction positive et continue est d'intégrale nulle si et seulement si elle est nulle, donc $P = 0$.
   — Positive car bien sur pour tout polynome P,
   $$< P, P >= \int_{-1}^{1} P^2(x)dx \geq 0$$
   car il s'agit d'une intégration de fonction positive.
2. On part de $1, X, X^2$ qu'on l'on normalise avec le procédé d'orthonormalisation de Gramm-Schmidt.
   On normalise 1 : on a $< 1, 1 >= 2$, donc on pose $P_1 = \frac{1}{\sqrt{<1,1>}}1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
   On utilise le processus habituel ensuite en posant
   $$P_2 = X - < P_1, X > P_1$$
   mais on aurait pu se rendre compte avant que $< 1, X >= 0$, on obtient tout de même $P_2 = X$ et on normalise à nouveau pour trouver le deuxième vecteur de base
   $$P_2' = \frac{1}{\sqrt{< P_2, P_2 >}} P_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}X.$$
   On recommence pour le 3ème vecteur de base : on pose
   $$P_3 = X^2 - < P_1, X^2 > P_1 - < P_2', X^2 > P_2'.$$
   On calcule donc et on obtient facilement $< P_1, X^2 >= \frac{\sqrt{2}}{3}$ et $< P_2', X^2 >= 0$. On a donc
   $$P_3 = X^2 - \frac{\sqrt{2}}{3}\frac{1}{\sqrt{2}} = X^2 - \frac{1}{3}$$
   et il ne reste plus qu'à normaliser le vecteur pour qu'il soit de norme 1, c'est à dire poser
   $$P_3' = \frac{1}{\sqrt{< P_3', P_3' >}} P_3 = \sqrt{\frac{5}{8}}(3X^2 - 1)$$
   et donc une base orthonormale est donnée par
   $$\mathcal{C} = \{\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}X, \sqrt{\frac{5}{8}}(3X^2 - 1)\}.$$

***Exercice* 8**

Soit E un espace euclidien et f un endomorphisme symétrique de E tel que pour tout $x \in E$, $< f(x), x >= 0$.

1. Quels sont les valeurs propres de f ?
2. En déduire que f est nul.

Solution

1. Si λ est une valeur propre de f, on a pour tout vecteur propre associé x
$$< f(x), x >=< \lambda x, x >= \lambda < x, x >= \lambda \|x\|^2$$
mais $< f(x), x >= 0$ donc comme le produit scalaire est défini, on a $\lambda = 0$. La seule valeur propre possible de f est donc 0.
2. Par le cours on sait que l'endomorphisme f est diagonalisable, avec pour seule valeur propre 0. Cela veut donc dire qu'il est semblable à la matrice nulle, et donc $f = 0$.

***Exercice* 9**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. On suppose qu'il existe un $k > 0$ tel que A^k soit la matrice nulle. Montrer que A est nécessairement nulle.

Solution

La matrice A est symétrique, donc par le cours diagonalisable dans une base orthonormée, c'est à dire qu'il existe une matrice P orthogonale et une matrice D diagonale telles que
$$A = PD^tP.$$
Maintenant on a
$$0 = A^k = (PD\ {}^tP)^k = PD^k\ {}^tP$$
mais alors on a $D^k = 0$ et donc clairement D est la matrice nulle, et A l'est aussi.

***Exercice* 10**

Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Trouver une base orthonormale de diagonalisation et exhiber une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que
$$A = PD^tP.$$

3. Faire de même avec la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Solution

1. La matrice A est symétrique donc diagonalisable, et même dans une base orthonormée.
2. On commence par diagonaliser comme d'habitude : on trouve le polynôme caractéristique $\chi_A = -(X+3)(X-3)^2$ et on voit après un petit calcul supplémentaire que

$$E_3 = Vect\{(1,-1,0),(1,0,-1)\} \qquad \text{et} \qquad E_{-3} = Vect\{(1,1,1)\}$$

Il reste à appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gramm-Schmidt à tout cela, comme on l'a fait à l'exercice 7.
On normalise le premier en posant $e_1 = \frac{1}{\sqrt{<(1,1,1),(1,1,1)>}}(1,1,1) = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.
On construit le deuxième vecteur à partir de $(1,-1,0)$:

$$e_2 = (1,-1,0) - < (1,-1,0), (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) > (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) = (1,-1,0)$$

car oui, ils sont déjà orthogonaux, il ne reste plus qu'à normaliser et poser

$$e_2' = \frac{1}{\sqrt{< (1,-1,0),(1,-1,0) >}}(1,-1,0) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0).$$

On finit par construire le troisième vecteur :

$$e_3 = (1,0,-1) - < (1,0,-1), (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) > (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$$
$$- < (1,0,-1), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0) > (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0)$$

Et on trouve donc $e_3 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1)$. Il ne reste plus qu'à le normaliser, et on pose donc

$$e_3' = \frac{1}{\sqrt{< (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1) >}}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1) = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}).$$

On a donc notre base orthonormale de diagonalisation $\mathcal{C} = \{e_1, e_2', e_3'\}$ et d'après le cours, en posant

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

on a bien $A = PD\,{}^tP$.

3. On fait la même chose avec B. D'une part elle est symétrique, donc diagonalisable en base orthonormée d'après le cours. On trouve comme polynôme caractéristique

$$\chi_G = -(X-3)(X-6)(X-9)$$

et comme sous espaces propres respectifs $E_3 = Vect\{(2,2,-1)\}$, $E_6 = Vect\{(-1,2,2)\}$, $E_9 = Vect\{(2,-1,2)\}$.
Reste à orthonormaliser, et à nouveau avec le procédé de Gramm-Schmidt on finit par aboutir par exemple à la base

$$\mathcal{C} = \{(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}), (\frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}), (\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3})\}$$

et donc en posant

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

on a bien $A = PD\,{}^tP$.