Feuille d'exercices 8

Probabilités - Dénombrement

Exercice 1

Soit a un réel strictement positif et X une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, 2, \dots, 8\}$, dont la loi est

$$\mathbb{P}(X = k) = ak(8 - k), \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, 8\}.$$

On rappelle que :

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

1. Pour quelle(s) valeur(s) de a la loi ci-dessus définit bien une loi de probabilité ?
2. Calculer l'espérance de X.

Solution

1. Pour définir une probabilité, il faut que $\sum_{k=1}^{8} \mathbb{P}(X = k) = 1$. On doit donc avoir

$$\sum_{k=1}^{8} ak(8 - k) = 1$$

et il reste à calculer avec la formule $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ et les formules données par l'énoncé. On trouve $\sum_{k=1}^{8} ak(8 - k) = 84a$, donc

$$a = \frac{1}{84}.$$

2. D'après la définition de l'espérance du cours,

$$E(X) = \sum_{k=1}^{8} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{8} ak^2(8 - k) = 8a\sum_{k=1}^{8} k^2 - a\sum_{k=1}^{8} k^3$$

et il reste à appliquer les formules de l'énoncé, on trouve $E(X) = 336a = \frac{336}{84}$.

Exercice 2

On lance deux l'un après l'autre. On note X le plus grand des numéros obtenus, et Y le plus petit.

1. Déterminer les lois de X et Y.
2. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[Y]$, puis les comparer.
3. Calculer $\mathrm{Var}(X)$ et $\mathrm{Var}(Y)$.

Solution

1. On note pour expliciter A et B les deux tirages, on a donc $X = \max\{A, B\}$ et $Y = \min\{A, B\}$. Évidemment, si X et Y sont à valeurs dans $\{1, ..., 6\}$. Maintenant si $k \in \{1, ..., 6\}$, on a

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}((A = k \text{ et } B \leq k) \text{ ou } (B = k \text{ et } A < k)).$$

Donc

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{k}{36} + \frac{k-1}{36} = \frac{2k-1}{36}.$$

Même raisonnement pour Y :

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}((A = k \text{ et } B \geq k) \text{ ou } (B = k \text{ et } A > k))$$

donc

$$\mathbb{P}(Y = k) = \frac{6-k+1}{36} + \frac{6-k}{36} = \frac{13-2k}{36}.$$

2.
$$E(X) = \sum_{k=1}^{6} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{6} \frac{2k^2 - k}{36}$$

On calcule cela avec les formule de l'énnoncé précédent pour trouver $E(X) = \frac{161}{36}$. De même pour l'espérance de Y :

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{6} k\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=1}^{6} \frac{13k - 2k^2}{36}$$

qui donne après calcul $E(Y) = \frac{91}{36}$.

3. On va utiliser la formule du cours $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$. C'est parti :

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{6} k^2\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{6} \frac{2k^3 - k^2}{36}$$

qui donne après calcul $E(X^2) = \frac{791}{36}$. On a donc

$$Var(X) = \frac{791}{36} - \left(\frac{161}{36}\right)^2 = \frac{2555}{1296}.$$

De même pour la variance de Y.

$$E(Y^2) = \sum_{k=1}^{6} k^2\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=1}^{6} \frac{13k^2 - 2k^3}{36} = \frac{301}{36}.$$

On a donc

$$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{301}{36} - \left(\frac{91}{36}\right)^2 = \frac{2555}{1296}$$

Exercice 3

On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. Soit X la variable aléatoire associant à la carte tirée sa valeur selon la règle suivante : 4 pour un as, 3 pour un roi, 2 pour une dame, 1 pour un valet et 0 pour toute autre carte.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer la probabilité de l'événement $\{X \leq 2\}$.
3. Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de X.
4. On pose $Y = -X$. Quelles sont l'espérance et la variance de Y ?

Solution

1. X est à valeur dans $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. On a
$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(X = 4) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$
et $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$.
2. $$\mathbb{P}(X \leq 2) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) = \frac{3}{4}.$$
3. $$E(X) = \sum_{k=0}^{4} k\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{3}{8} + \frac{4}{8} = \frac{10}{8}$$
On calcule la variance avec la formule $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.
$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{4} k^2\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{8} + \frac{4}{8} + \frac{9}{8} + \frac{16}{8} = \frac{30}{8}$$
Donc
$$V(X) = \frac{30}{8} - \left(\frac{10}{8}\right)^2 = \frac{140}{64}.$$
D'après le cours, on a que l'écart-type est la racine carrée de la variance, donc l'écart-type de X vaut $\sqrt{\frac{140}{64}}$.
4. D'après le cours on sait que pour toute variable aléatoire X et réels a et b, $E(aX + b) = aE(X) + b$ et $V(aX + b) = a^2V(X)$. On a donc $E(Y) = E(-X) = -E(X)$ et $V(Y) = V(-X) = V(X)$.

Exercice 4

(Lois classiques).

1. On considère une famille de 10 enfants. On note X le nombre de filles et on considère que chaque enfant nait fille ou garçon avec une probabilité $1/2$. Quelle est la loi de X, son espérance, sa variance ?
2. Soit une urne avec une boule rouge et trois boules noires. On tire avec remise (c'est-à-dire qu'à chaque fois on remet la boule tirée dans l'urne) une boule de l'urne au hasard jusqu'à tirer la boule rouge. Quelle est la loi de X, le nombre de tirages nécessaires ? Préciser son espérance et sa variance.

Solution

1. La variable X suit une loi binomiale de paramètre $\frac{1}{2}$ pour 10 essais. Elle prend donc ses valeurs dans $\{1, ..., 10\}$ et on a $\mathbb{P}(X = k) = \binom{10}{k}\frac{1}{2^{10}}$.
   Son espérance est donc $E(X) = \frac{10}{2} = 5$ et sa variance vaut $V(X) = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$.
2. La variable X suit ici une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{4}$. elle est donc à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et on a $\mathbb{P}(X = k) = \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\frac{1}{4} = \frac{3^{k-1}}{4^k}$.
   On obtient son espérance $E(X) = 4$ et sa variance $V(X) = \frac{3/4}{1/4^2} = 12$.

***Exercice* 5**

Soit X une v.a. discrète d'espérance 10 et de variance 3. Calculer l'espérance, la variance et le moment d'ordre 2 des variables suivantes :

$$Y = 2X + 3, \quad Z = 1 - \frac{X}{2}, \quad T = \frac{X}{5} - 2, \quad U = \frac{-\sqrt{2}X - 3}{\sqrt{3}}.$$

Solution On sait d'après le cours que si X est une variable aléatoire et a et b sont des réels, on a $E(aX + b) = aE(X) + b$ et $V(aX + b) = a^2V(X)$. On en déduit facilement par exemple que $E(Y) = E(2X + 3) = 2E(X) + 3$ et $V(Y) = V(2X + 3) = 4V(X)$. Pour le moment d'ordre 2, on observe que

$$E(Y^2) = E((2X + 3)^2) = E(4X^2 + 12X + 9) = 4E(X^2) + 12E(X) + 9.$$

Le raisonnement est similaire pour les autres exemples.

***Exercice* 6**

On considère un dé truqué, de telle sorte que la probabilité d'obtenir la face numérotée k est proportionnelle à k. Ainsi, si Y dénote la variable aléatoire associée au résultat du lancer de ce dé, on a, pour $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

$$\mathbb{P}(Y = k) = ck.$$

1. Déterminer c afin que ceci définisse bien une loi de probabilité.
2. Donner sous forme de tableau la loi de Y, avec la valeur numérique de c trouvée précédemment.
3. Calculer l'espérance et la variance de Y.
4. On lance maintenant (infiniment souvent) ce même dé truqué jusqu'à obtenir un 6. Soit Z la variable égale au nombre de lancers nécessaires. Déterminer la loi de Z.

Solution

1. Pour définir une probabilité, il faut que $\sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(Y = k) = 1$. Cela donne donc

   $$1 = \sum_{k=1}^{6} ck$$

   et ainsi $c = \frac{1}{21}$.

2.

$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

3. On calcule simplement
$$E(Y) = \sum_{k=1}^{6} k\mathbb{P}(Y = k) = \frac{91}{21}$$
et avec la formule reliant $V(Y)$ et son espérance
$$E(Y^2) = \sum_{k=1}^{6} k^2\mathbb{P}(Y = k) = \frac{441}{21}$$
On a donc
$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{980}{441}.$$
4. La variable aléatoire Z suit une loi géométrique de paramètre $\mathbb{P}(Y = 6) = \frac{6}{21}$. On a donc par le cours que pour tout k positif
$$\mathbb{P}(Z = k) = \left(\frac{15}{21}\right)^{k-1} \frac{6}{21}.$$

Exercice 7

Soit X une variable aléatoire de loi binomiale $\mathrm{Bin}(8, 1/2)$ et Y une variable aléatoire de loi de Poisson $\mathcal{P}(6)$.

1. Donner leur espérance et leur variance.
2. Calculer la probabilité des événements
$$\{X > 6\}, \quad \{1 \leq X \leq 4\}, \quad \{Y \leq 2\}, \quad \{5 < Y \leq 8\}.$$

Solution

1. $E(X) = \frac{8}{2} = 4$ et $V(X) = \frac{8}{4} = 2$. De l'autre côté $E(Y) = V(Y) = 6$
2. On énumère juste les possibilités :
$$\mathbb{P}(X > 6) = \mathbb{P}(X = 7 \text{ ou } X = 8) = \binom{8}{6}\frac{1}{2^8} + \binom{8}{7}\frac{1}{2^8} = \frac{9}{64}.$$
De même
$$\mathbb{P}(\{1 \leq X \leq 4\} = \left(\binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \binom{8}{3} + \binom{8}{4}\right)\frac{1}{2^8} = \frac{81}{128}.$$
De même pour la suite :
$$\mathbb{P}(\{Y \leq 2\} = \mathbb{P}(Y = 0 \text{ ou } Y = 1 \text{ ou } Y = 2) = e^{-6}\left(1 + 6 + \frac{6^2}{2!}\right) = 25e^{-6}.$$
et
$$\mathbb{P}(\{5 < Y \leq 8\} = \mathbb{P}(Y = 6 \text{ ou } Y = 7 \text{ ou } Y = 8) = e^{-6}\left(\frac{6^6}{6!} + \frac{6^7}{7!} + \frac{6^8}{8!}\right) = \frac{5103}{32}e^{-6}.$$

Exercice 8

On admet que le nombre de défauts X sur le verre d'une ampoule obéit à une loi de Poisson de paramètre 4. Calculer la probabilité des événements suivants :

1. L'ampoule est sans défaut.
2. Il y a plus de deux défauts sur l'ampoule.
3. Il y a entre trois et sept défauts sur l'ampoule.

Solution

1. La probabilité que l'ampoule n'ait aucun défaut est
$$\mathbb{P}(X = 0) = e^{-4}.$$
2.
$$\mathbb{P}(\{X \geq 2\}) = 1 - \mathbb{P}(\{X < 2\}) = 1 - (e^{-4} + 4e^{-4})$$
et l'on obtient donc $\mathbb{P}(\{X \geq 2\}) = 1 - 5e^{-4} \simeq 0,91$.
3.
$$\mathbb{P}(\{3 \leq X \leq 7\}) = \mathbb{P}(X = 3 \text{ ou } X = 4 \text{ ou } X = 5 \text{ ou } X = 6 \text{ ou } X = 7)$$
Ce qui donne donc
$$e^{-4}\left(\frac{4^3}{3!} + \frac{4^4}{4!} + \frac{4^5}{5!} + \frac{4^6}{6!} + \frac{4^7}{7!}\right) = e^{-4}\left(\frac{12224}{315}\right) \simeq 0,71$$