Feuille d'exercices 9

Couples de variables aléatoires

***Exercice* 1**

Soit (X, Y) deux variables aléatoires discrètes telles que X est à valeurs dans $\{1, 2, 3, 4\}$ et Y est à valeurs dans $\{1, 2\}$. On définit la loi du couple (X, Y) par

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{1}{7}\left(1 - \frac{ij}{30}\right).$$

1. Vérifier qu'on a bien une loi de probabilité.
2. Déterminer les lois marginales.

***Solution* 1**

1. Pour tout couple (i, j), $\mathbb{P}(X = i, Y = j)$ est bien à valeurs dans $[0, 1]$. Reste à savoir si l'événement total est bien de probablité 1. On vérifie :

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{2}\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \sum_{i=1}^{4}\frac{1}{7}\left(2 - \frac{i}{30} - \frac{2i}{30}\right) = \frac{1}{7}\left(\sum_{i=1}^{4} 2 - \frac{i}{10}\right) = 1.$$

2. On calcule pour $k \in \{1, 2, 3, 4\}$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X = k, Y = 1 \text{ ou } 2) = \frac{1}{7}\left(1 - \frac{k}{30}\right) + \frac{1}{7}\left(1 - \frac{2k}{30}\right) = \frac{1}{7}\left(2 - \frac{k}{10}\right)$$

De même pour Y :

$$\mathbb{P}(Y = l) = \sum_{i=1}^{4}\frac{1}{7}\left(1 - \frac{il}{30}\right) = \frac{4}{7} - \frac{l}{30}\sum_{i=1}^{4} i = \frac{4}{7} - \frac{l}{3}$$

***Exercice* 2**

On dispose de deux dés : l'un a 2 faces blanches et 4 faces rouges, l'autre a 3 faces blanches, 1 face rouge et 2 faces vertes. On lance les deux dés et on s'intéresse aux couleurs blanche et verte. Soit X le nombre aléatoire de faces blanches apparues sur les deux dés, et Y le nombre aléatoire de faces vertes.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y) et ses lois marginales.
2. X et Y sont-elles indépendantes ?

Solution 2

1. On va utiliser la notation suivante pour la suite : sachant que B = blanc, R = rouge, V = vert, on écrira par exemple "BR" pour "le premier dé est Blanc, le second dé est Rouge". Il reste a énumérer les possibilités :

$$\mathbb{P}(X=0,Y=0)=\mathbb{P}(RR)=\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{4}{36}$$
$$\mathbb{P}(X=1,Y=0)=\mathbb{P}(BR \text{ ou } RB)=\frac{2}{36}+\frac{12}{36}=\frac{14}{36}$$
$$\mathbb{P}(X=2,Y=0)=\mathbb{P}(BB)=\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{1}{6}$$
$$\mathbb{P}(X=0,Y=1)=\mathbb{P}(RV)=\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{8}{36}$$
$$\mathbb{P}(X=1,Y=1)=\mathbb{P}(BV)=\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{4}{36}$$
$$\mathbb{P}(X=2,Y=1)=0$$

2. On voit que $\mathbb{P}(X=2,Y=1)=0$, alors que le produit $\mathbb{P}(X=2)\cdot\mathbb{P}(Y=1)$ n'est pas nul, les variables ne sont donc pas indépendantes.

Exercice 3

La loi d'un couple de variables aléatoires discrètes (X,Y) est donnée par le tableau suivant :

$X\backslash Y$	-1	1
0	$1/4$	$p+1/8$
1	$1/2$	$-p+1/8$

1. Quelles conditions doit vérifier p ?
2. Calculer, en fonction de p, la loi marginale de X ainsi que $\mathbb{E}[X]$ et $\mathrm{Var}(X)$.
3. Calculer la loi marginale de Y ainsi que $\mathbb{E}[Y]$ et $\mathrm{Var}(Y)$.
4. On pose $S=X+Y$. Déterminer, en fonction de p, la loi de S.
5. Déterminer, en fonction de p, la covariance de (X,Y).
6. Pour quelle(s) valeur(s) de p, le couple (X,Y) est-il de corrélation nulle ?
7. Existe-t-il une ou plusieurs valeurs de p qui rendent X et Y indépendantes ?

Solution 3

1. On voit que le fait que l'événement total soit de probabilité 1 est vrai pour tout réel p. Les seules réelles restrictions sont donc que chacune des valeurs des cases du tableau doit appartenir à l'intervalle $[0,1]$. On a donc :

$$0\le p+\frac{1}{8}\le 1 \text{ et } 0\le -p+\frac{1}{8}\le 1$$

ce qui donne $-\frac{1}{8}\le p\le\frac{1}{8}$.

2. On a
$$E(X) = \mathbb{P}(X = 1) = -p + \frac{5}{8}.$$
On observe aussi que $E(X^2) = E(X)$, on a donc
$$Var(X) = -p + \frac{5}{8} - (-p + \frac{5}{8})^2 = -p^2 + \frac{p}{4} + \frac{15}{64}.$$
3. Même chose, sachant que $\mathbb{P}(Y = -1) = \frac{3}{4}$ et $\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{4}$:
$$E(Y) = -\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}.$$
et $E(Y^2) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$. On a donc $Var(Y) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.
4. La variable S est à valeurs dans $\{-1, 0, 1, 2\}$ et on a
$$\mathbb{P}(S = -1) = \mathbb{P}(X = 0 \text{ et } Y = -1) = \frac{1}{4}$$
$$\mathbb{P}(S = 0) = \mathbb{P}(X = 1 \text{ et } Y = -1) = \frac{1}{2}$$
$$\mathbb{P}(S = 1) = \mathbb{P}(X = 0 \text{ et } Y = 1) = p + \frac{1}{8}$$
$$\mathbb{P}(S = 2) = \mathbb{P}(X = 1 \text{ et } Y = 1) = -p + \frac{1}{8}$$
5. On rappelle que $Cov(XY) = E(XY) - E(X)E(Y)$. La variable XY est à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$ et on a
$$\mathbb{P}(XY = -1) = \mathbb{P}(X = 1 \text{ et } Y = -1) = \frac{1}{2}$$
$$\mathbb{P}(XY = 0) = \mathbb{P}(X = 0) = p + \frac{3}{8}$$
$$\mathbb{P}(XY = 1) = \mathbb{P}(X = 1 \text{ et } Y = 1) = -p + \frac{1}{8}$$
On a donc
$$E(XY) = -\frac{1}{2} + (-p + \frac{1}{8}) = -p - \frac{3}{8}$$
et
$$Cov(X, Y) = (-p - \frac{3}{8}) - (\frac{5}{8} - p) \cdot \frac{-1}{2} = -\frac{3}{2}p - \frac{1}{16}.$$
6. La convariance et donc nulle si et seulement si $p = -\frac{1}{24}$.
7. Si les variables sont indépendantes, alors $Cov(X, Y) = 0$ d'après le cours, donc si cela est possible, cela ne peut l'être que pour $p = -\frac{1}{24}$.
On vérifie à la main les conditions nécessaires pour que X et Y soient indépendantes. Si l'on a $\mathbb{P}(X = 0) \cdot \mathbb{P}(Y = -1) = (p + \frac{3}{8})\frac{3}{4} = \mathbb{P}(X = 0, Y = -1)$ cela veut dire que l'on a
$$(p + \frac{3}{8})\frac{3}{4} = \frac{1}{4},$$
autrement dit, $p = -\frac{1}{24}$, ok. On vérifie de même que c'est le cas pour toutes les valeurs possibles de X et Y, on a donc bien que ces variables sont indépendantes, si et seulement si $p = -\frac{1}{24}$.

***Exercice* 4**

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes de loi de Poisson de paramètres 2 et 3. On pose $S = X + Y$.

1. Calculer $\mathbb{P}(S = 0)$, puis $\mathbb{P}(S = 1)$ et $\mathbb{P}(S = 2)$.
2. Calculer $\mathbb{P}(S = k)$ pour tout entier naturel k.
3. Cas général : X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes de loi de Poisson de paramètres $\mu > 0$ et $\lambda > 0$. On pose $S = X + Y$. Quelle est la loi de S ?

***Solution* 4**

1. Les variables suivant une loi de Poisson sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a donc

$$\mathbb{P}(S = 0) = \mathbb{P}(X = 0 \text{ et } Y = 0) = e^{-2} \cdot e^{-3} = e^{-5}.$$

De même

$$\mathbb{P}(S = 1) = \mathbb{P}(X = 0 \text{ et } Y = 1) + \mathbb{P}(X = 1 \text{ et } Y = 0) = e^{-2} \cdot 3e^{-3} + 2e^{-2} \cdot e^{-3}$$

et on a donc $\mathbb{P}(S = 1) = 5e^{-5}$. Enfin,

$$\mathbb{P}(S = 2) = \mathbb{P}(X = 0 \text{ et } Y = 2) + \mathbb{P}(X = 1 \text{ et } Y = 1) + \mathbb{P}(X = 2 \text{ et } Y = 0) = \frac{25}{2}e^{-5}$$

2. On calcule, en n'oubliant pas que X et Y sont indépendantes :

$$\mathbb{P}(S = k) = \sum_{i+j=k} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \sum_{i+j=k} e^{-2}\frac{2^i}{i!}e^{-3}\frac{3^j}{j!} = e^{-5} \sum_{i+j=k} \frac{2^i 3^j}{i!j!}.$$

Le développement des puissances avec les coefficients multinomiaux assure que $\sum_{i+j=k} \frac{2^i 3^j}{i!j!} = (2+3)^k$, on a donc

$$\mathbb{P}(S = k) = \frac{5^k}{k!}e^{-5}$$

3. En faisant exactement le même calcul que la question précédente, en remplacant, 2 et 3 par μ et λ respectivement, on obtient

$$\mathbb{P}(S = k) = \frac{(\lambda + \mu)^k}{k!}e^{-(\lambda+\mu)},$$

autrement dit S suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

***Exercice* 5**

On considère d'une part X une variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre $2/3$ et d'autre part Y une variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre $3/4$. On suppose de plus que X et Y sont des variables indépendantes.

1. Montrer que $\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = 1/12$.
2. En procédant de même, donner la loi de probabilité du couple (X, Y). On représentera cette loi dans un tableau.
3. Calculer $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$, $\mathrm{Var}(Y)$, $\mathrm{Var}(X)$.
4. Que vaut $\mathrm{Cov}(X, Y)$?
5. Soit $S = X + Y$. Déterminer la loi de S. A partir de cette loi, calculer $\mathbb{E}[S]$, $\mathrm{Var}(S)$.
6. Retrouver la valeur de $\mathbb{E}[S]$ et $\mathrm{Var}(S)$ en utilisant uniquement les résultats des questions 3 et 4 (donc sans utiliser la loi de S).
7. Soit $T = XY$. Déterminer la loi de T. A partir de cette loi, calculer $\mathbb{E}[T]$.
8. Retrouver la valeur de $\mathbb{E}[T]$ en utilisant uniquement les résultats des questions 3 et 4.
9. Calculer $\mathrm{Cov}(T, X)$.

***Solution* 5**

1. Les variables sont indépendantes, on a donc
$$\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = \mathbb{P}(X = 0) \cdot \mathbb{P}(Y = 0) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$
2. Pour toutes les valeurs possibles de X et Y, on calculer $\mathbb{P}(X = i, Y = j)$ comme la question précédente. On obtient alors le tableau suivant.

$Y\backslash X$	0	1
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$
1	$\frac{3}{12}$	$\frac{1}{2}$

3. Les variables X et Y sont à valeurs dans $\{0, 1\}$, donc leur espérances respectives sont égales à la probabilité qu'elles vaillent 1 : $E(X) = \frac{2}{3}$ et $E(Y)\frac{3}{4}$. On observe immédiatement que $E(X^2) = \frac{2}{3}$ et $E(Y^2) = \frac{3}{4}$. Ainsi,
$$Var(X) = \frac{2}{3} - \frac{4}{9} = \frac{2}{9} \text{ et } Var(Y) = \frac{3}{4} - \frac{9}{16} = \frac{3}{16}.$$
4. Les variables sont indépendantes, donc de covariance nulle d'après le cours.
5. On voit que S est à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$. De plus le calcul est immédiat :
$$\mathbb{P}(S = 0) = \mathbb{P}(X = 0 \text{ et } Y = 0) = \frac{1}{12}$$
$$\mathbb{P}(S = 1) = \mathbb{P}(X = 1 \text{ ou } Y = 1) - \mathbb{P}(X = Y = 1) = \frac{5}{12}$$
$$\mathbb{P}(S = 2) = \mathbb{P}(X = 1 \text{ et } Y = 1) = \frac{1}{2}.$$
On en déduit que $E(S) = \frac{5}{12} + \frac{2}{2} = \frac{17}{12}$ et de la même manière que $E(S^2) = \frac{5}{12} + \frac{4}{2} = \frac{29}{12}$. Ainsi,
$$Var(S) = \frac{29}{12} - \left(\frac{17}{12}\right)^2 = \frac{59}{144}.$$

6. L'espérance est linéaire en les variables, on a donc d'après le cours

$$E(S) = E(X) + E(Y) = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{17}{12}$$

et de même d'après le cours $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X,Y)$, donc

$$Var(S) = Var(X) + Var(Y) = \frac{2}{9} + \frac{3}{16} = \frac{59}{144}.$$

7. La variable T est à valeurs dans $\{0,1\}$ et on ne peut avoir $T = 1$ que si à la fois Xet Y valent 1. Donc

$$\mathbb{P}(T = 1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \text{ et } \mathbb{P}(T = 0) = \frac{1}{2}.$$

On a donc $E(T) = \mathbb{P}(T = 1) = \frac{1}{2}$.

8. On a $0 = Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$, donc

$$E(T) = E(X)E(Y) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}.$$

9. On calcule bêtement la covariance en exhibant la loi suivie par la variable TX, qui est à valeurs dans $\{0,1\}$. On a $TX = 1$ si et seulement si T et X valent tous les deux 1, on a donc

$$\mathbb{P}(TX = 1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

et $\mathbb{P}(TX = 0) = \frac{2}{3}$.

On a donc

$$Cov(T,X) = E(TX) - E(T)E(X) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = 0.$$

(on peut remarquer que les variables T et X ne sont pourtant pas indépendantes)