Algèbre

TD 1

Exercice 1

Si G est un groupe, montrer que son élément neutre e_G est nécessairement unique.

Exercice 2

Les ensembles suivants munis des lois indiquées sont-ils des groupes ? Si ce n'est pas le cas, indiquer là où le bât blesse.

1. $(\mathbb{N}, +)$
2. $(\mathbb{Z}^*, \times)$
3. $(\mathbb{Q}, \times)$
4. $(\{\text{rotations du plan de centre } 0\}, \circ)$
5. $(\{-1, 1\}, \times)$
6. $(\{z \in \mathbb{C},\ z^n = 1\}, \times)$
7. $(GL_n(\mathbb{R}), +)$
8. $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$.

Exercice 3

On considère l'ensemble $\mathbb{H}_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ pour lequel on définit une multiplication par les règles suivantes :

1. 1 est l'élément neutre ;
2. -1 commute avec tous les éléments de $\mathbb{H}_8$ et $(-1) \cdot (-1) = 1$;
3. $ij = -ji = k$;
4. $i^2 = j^2 = k^2 = -1$.

Expliciter la table de multiplication de $\mathbb{H}_8$ ci-dessous. Muni de cette loi, $\mathbb{H}_8$ est appelé le groupe des quaternions.

	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1								
-1								
i								
$-i$								
j								
$-j$								
k								
$-k$								

Exercice 4

Soit $(G, *)$ un ensemble muni d'une loi de composition associative. Montrer que G est un groupe si et seulement s'il existe un élément $e \in G$ tel que pour tout $g \in G$, on ait à la fois $g * e = g$ et un élément $g' \in G$ tel que $g * g' = e$.

Exercice 5

L'ensemble $X = \{x \in \mathbb{R},\ x > 0 \text{ et } x \neq 1\}$ est-il un groupe pour la loi $x * y = x^{\ln(y)}$?

Exercice 6

Montrer que pour tout élément g d'un groupe G, la translation $\tau_g : G \longrightarrow G$ définie par $g' \mapsto gg'$ est une bijection.

Exercice 7

Soit G un groupe commutatif d'ordre n et soit $g \in G$. À l'aide de l'exercice précédent, montrer que $x = \prod_{h \in G} h$ vérifie $g^n x = x$. En déduire que $g^n = e$.