Algèbre

Cours-TD 2

Exercice 1

Montrer que $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},\ a^2+b^2=1 \right\}$ est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$.

Exercice 2

Montrer que l'ensemble $O_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.

Si $a \in \mathbb{R}$, on note U_a l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ de déterminant a.
Montrer que U_1 est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ (il s'agit de $SL_n(\mathbb{R})$, le groupe spécial linéaire). Pour quelles autre valeur de a cette propriété persiste-t-elle ?

Exercice 3

Montrer que $X = \{x \in \mathbb{R}^*,\ x = a + b\sqrt{2},\ (a,b) \in \mathbb{Q}^2\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$.

Exercice 4

1. Montrer que si n est un entier, alors $n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.
2. Soit $H \subset \mathbb{Z}$ un sous-groupe non-réduit à $\{0\}$. En considérant un élément minimal $n \in H \cap \mathbb{N}^*$ et en utilisant la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$, montrer que $H = n\mathbb{Z}$.

Exercice 5

Montrer que si H et K sont deux sous-groupes stricts d'un groupe G, on a $H \cup K \neq G$.

Exercice 6

Vérifier que l'intersection de deux sous-groupes H, K d'un groupe G est un sous-groupe de G. Montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.

Exercice 7

Soient H, J, K des sous-groupes d'un groupe G. Montrer que $H \subset K \Rightarrow H + (J \cap K) = (H + J) \cap K$.

Exercice 8

On considère le groupe abélien $(\mathbb{R}^*, \times)$ dont on veut déterminer les sous-groupes finis. Soit $H \subset \mathbb{R}^*$ un sous-groupe de cardinal n. En utilisant l'exercice 7 de la feuille précédente, déterminer H.

Exercice 9

Soit G un groupe fini tel que pour tout $g \in G$, $g^2 = e$.

1. Montrer que G est abélien
2. Montrer que G est muni d'une structure de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espace vectoriel
3. En déduire que le cardinal de G est une puissance de 2.