

---

## Algèbre

Cours-TD 3

---

### Exercice 1

---

Donner un exemple de sous-groupe du produit de deux groupes  $G \times G'$  qui n'est pas le produit  $H \times H'$  de deux sous-groupes respectifs de  $G$  et  $G'$  ?

### Exercice 2

---

Soit  $H$  un sous-groupe strict d'un groupe  $G$ . En considérant un élément  $\alpha$  non-neutre de  $G \setminus H$ , montrer que le sous groupe engendré par le complémentaire de  $H$  est  $G$  tout entier.

### Exercice 3

---

Soit  $G$  un groupe fini et  $g, h$  deux éléments de  $G$ .

1. Montrer que les éléments  $g$  et  $hgh^{-1}$  ont le même ordre.
2. En déduire que si un groupe  $G$  possède un unique élément  $g$  d'ordre 2, alors  $g$  commute à tous les éléments de  $G$ .

### Exercice 4

---

Montrer qu'un groupe  $G$  dans lequel tous les éléments non-neutres sont d'ordre 2 est commutatif.

### Exercice 5

---

Soit  $p$  un nombre premier et  $G$  un groupe de cardinal  $p$ . Montrer que  $G$  est cyclique.

### Exercice 6

---

Soient  $H$  et  $K$  deux sous-groupe d'un groupe  $G$  dont les ordres respectifs  $m$  et  $n$  sont premiers entre eux. Montrer que  $H \cap K = \{e\}$ .

### Exercice 7

---

Si  $k$  et  $n$  sont deux entiers, montrer que l'ordre de la classe  $\bar{k}$  dans  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est égal à  $\frac{n}{\text{pgcd}(k,n)}$ .