Algèbre

Cours-TD 4

Exercice 1

Montrer qu'un groupe G est abélien si et seulement si l'application $g \mapsto g^{-1}$ est un morphisme de groupes.

Exercice 2

Montrer qu'un groupe G est abélien si et seulement si l'application $g \mapsto g^2$ est un morphisme de groupes.

Exercice 3

Soit G un groupe abélien d'ordre n. Montrer que pour tout entier k premier à n, l'application $\varphi_k : g \mapsto g^k$ est un automorphisme de groupes.

Exercice 4

Montrer que si p et q sont des nombres premiers distincts, tout groupe abélien G d'ordre pq est cyclique (on pourra utiliser le théorème de Cauchy que l'on verra plus tard dans le cours : si p est un nombre premier qui divise $Card(G)$, alors G possède un élément d'ordre p).

Et si G n'est pas abélien ?

Exercice 5

Montrer que si G est un groupe abélien, l'ensemble des éléments d'ordre fini dans G est un sous-groupe. Montrer que ce n'est pas le cas si G n'est pas abélien (on pourra par exemple considérer le groupe $GL_2(F)$, pour un corps F).

Exercice 6

Soit G un groupe et soient a et b des éléments de G d'ordres respectifs m et n tels que $ab = ba$ et $\text{pgcd}(m, n) = 1$. Montrer que l'ordre de ab est mn. Trouver des contre exemples lorsque l'on ne suppose pas $ab = ba$ ou $\text{pgcd}(m, n) = 1$.