# Algèbre

Cours-TD 5

## Exercice 1

Montrer que si $f : G \longrightarrow G'$ est un morphisme de groupes, alors son noyau $\ker(f)$ est un sous-groupe de $G$, et son image est un sous-groupe de $G'$. Montrer que $f$ est injective si et seulement si son noyau est réduit à $e_G$.

## Solution

On a toujours $f(e_G) = e_{G'}$, donc le noyau comme l'image de $f$ ne sont pas vides. Les deux sont clairement stables par multiplication et l'égalité $f(g)^{-1} = f(g^{-1})$ valable pour tout $g \in G$ assure qu'ils sont aussi stable par passage à l'inverse.

Supposons que $ker(f)$ soit réduit à 0. Dans ce cas, si on a $f(x) = f(y)$, alors $f(xy^{-1}) = e_{G'}$ donc $xy^{-1} \in ker(f)$ est nul et $x = y$. Réciproquement, si $f$ est injective et on a $f(x) = e_{G'}$, alors $f(x) = f(e_G)$ donc $x = e_G$ et son noyau est réduit à l'élément neutre.

## Exercice 2

Si $n$ et $m$ deux nombres entiers positifs, on note $\bar{\cdot}$ et $\tilde{\cdot}$ les classes modulo $n$ et $m$. On considère l'élément $(\bar{1}, \tilde{1}) \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Quel est son ordre ?

En déduire que si $n$ et $m$ sont premiers entre eux, le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ est cyclique.

## Solution

On a pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, $k(\bar{1}, \tilde{1}) = (\bar{k}, \tilde{k})$ et donc $k(\bar{1}, \tilde{1}) = ((\bar{0}, \tilde{0})$ si et seulement si $k$ est un multiple de $ppcm(n, m)$. L'ordre de la classe $(\bar{1}, \tilde{1})$ est donc égal à $ppcm(n, m)$. Dès lors si $n$ et $m$ sont premiers entre eux, $(\bar{1}, \tilde{1})$ est d'ordre $mn$ et comme cela correspond à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, il engendre ce groupe tout entier.

## Exercice 3

Soit $G$ un groupe. On dit qu'un sous-groupe $H$ de $G$ est caractéristique, si pour tout $\varphi \in Aut(G)$, on a $\varphi(H) = H$. Montrer que si $H$ est un sous-groupe caractéristique dans $G$ et si $K$ est un sous-groupe caractéristique dans $H$, alors $K$ est un sous-groupe caractéristique dans $G$.

## Solution

soit $\varphi$ un automorphisme de $G$. Comme $H$ est un sous-groupe caractéristique de $G$, la restriction de $\varphi$ à $H$ est un automorphisme de $H$ (elle est clairement injective et surjective). De fait, comme $K$ est inclus dans $H$ et en appliquant cette propriété à la restriction de $\varphi$ à $H$, on obtient que $(K) = K$.

## Exercice 4

Montrer que si $\varphi : G \longrightarrow G'$ est un isomorphisme de groupes, alors $\varphi$ induit un isomorphisme entre les centres de $G$ et $G'$. En déduire qu'il n'existe pas d'isomorphisme de groupes $\varphi : GL_n(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$.

## Solution

Si $g \in Z(G)$, alors $\varphi(g) \in Z(G')$ puisque pour tout $g' \in G'$, on a un antécédent $g''$ par $\varphi$ et

$$\varphi(g)g' = \varphi(gg'') = \varphi(g'')\varphi(g) = g'\varphi(g).$$

La restriction de $\varphi$ à $Z(G)$ est donc un morphisme de groupes $Z(G) \longrightarrow Z(G')$ qui est surjectif car si l'on a $g' \in Z(G')$ et $g''$ un antécédent par $\varphi$, on a pour tout $g \in G$,

$$gg'' = \varphi^{-1}(g''')\varphi^{-1}(g')$$

pour un certain $g'''$, et donc puisque $\varphi^{-1}$ est un morphisme de groupes et $g' \in Z(G')$ on a $gg'' = g''g$. L'application $\varphi$ et clairement injective, car il s'agit de la restriction d'une injection, c'est donc une bijection.

Un isomorphisme $\varphi : GL_n(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ induit un isomorphisme de leurs centres respectifs $\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{C}^*$, ce qui est impossible car $\mathbb{C}^*$ possède l'élément $i$ qui est d'ordre 4, tandis que dans $\mathbb{R}^*$ il n'y a pas de racine 4-ème de l'unité.