Algèbre
TD6 et TD7

Exercice 1

Pour les permutations σ suivantes, décomposer σ en produits de cycles disjoints, en produit de transpositions, calculer l'ordre de σ, la signature de σ, calculer σ^{100} :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 9 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solution

On applique l'algorithme de décomposition des permutations en cycles à supports disjoints.

1. On a $\sigma_1 = (1346) \circ (25)$, et donc $\sigma_1 = (13) \circ (34) \circ (46) \circ (25)$.
   La permutation σ_1 est donc de signature 1 et est d'ordre $ppcm(4,2) = 4$ car cette décomposition est en cycles à supports disjoints.
   On a donc clairement $\sigma_1^{100} = id$.
2. On a $\sigma_2 = (1478) \circ (265) \circ (39)$, et donc $\sigma_2 = (14) \circ (47) \circ (78) \circ (26) \circ (65) \circ (39)$.
   La permutation σ_2 est donc de signature 1 et est d'ordre $ppcm(4,3,2) = 12$.
   Comme les cycles qui apparaissent dans la décomposition de σ_2 sont à support disjoints ils commutent et on a
   $$\sigma_2^{100} = (1478)^{100} \circ (265)^{100} \circ (39)^{100}.$$
   Les cycles (1478) et (39) sont d'ordres respectives 4 et 2, ils sont donc triviaux à la puissance 100 et on a $\sigma_2^{100} = (265)^{100} = (265)$ car (265) est d'ordre 3.

Exercice 2

Pour $n \geq 1$, on note $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{S}_n$ de signature égale à 1. $\mathcal{A}_n$ est appelé le groupe alterné d'indice n.

1. Démontrer que $\mathcal{A}_n$ est un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$.
2. Énumérer tous les éléments de $\mathcal{A}_3$, de $\mathcal{A}_4$.
3. On suppose désormais que $n \geq 2$ et on fixe τ une transposition de $\mathcal{S}_n$. Démontrer que l'application $\phi : S_n \to S_n,\ \sigma \mapsto \sigma \circ \tau$ est une bijection. En déduire le cardinal de $\mathcal{A}_n$.

Solution

1. C'est le noyau de la signature.
2. $\mathcal{A}_3 = \{id, (123), (132)\}$ et
   $\mathcal{A}_4 = \{id, (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$.
3. C'est une bijection comme vu à la première feuille, d'inverse égal à elle-même. Sa restriction à $\mathcal{A}_n$ réalise une bijection des permutations paires aux permutations impaires, donc on a $2Card(\mathcal{A}_n) = Card(\mathfrak{S}_n)$.

Exercice 3

Soit $n \geq 1$. Déterminer la signature de la permutation suivante :

$$\sigma_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution

On voit bien que la décomposition de cette permutation en cycles à supports disjoints est donnée par

$$\sigma_n = (1\ n) \circ (2\ n-1) \circ ... \circ (\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \ \ n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor)$$

donc la permutation est de signature est égale à $(-1)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$.

Exercice 4

Montrer que si $c = (a_1 ... a_k) \in \mathfrak{S}_n$ est un k-cycle, alors pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$ correspond au cycle $(\sigma(a_1)...\sigma(a_k))$.

Solution

Si x est tel que $\sigma^{-1}(x)$ n'est pas dans le support de c, on a $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}(x) = \sigma \circ \sigma^{-1}(x) = x$.
Si en revanche $\sigma^{-1}(x)$ est dans le support de c (disons $\sigma^{-1}(x) = a_l$, on a $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}(x) = \sigma \circ c(a_l) = \sigma(a_{l+1})$.

Exercice 5

Pour $n \geq 2$, déterminer les morphismes de groupes $\mathfrak{S}_n \longrightarrow (\mathbb{C}^*, \times)$.

Indice : on pourra considérer l'image d'une transposition.

Solution

Si ϕ est un tel morphisme, on a $\phi((1,2))^2 = \phi(id) = 1$, donc $\phi((1,2)) = \pm 1$. Si τ est une autre transposition elle est conjuguée à $(1,2)$ donc on a $\phi(\tau) = \phi((1,2))$.
En écrivant toute permutation comme un produit de transpositions, on a ϕ qui est soit triviale ($\phi(\tau) = 1$) ou c'est la signature ($\phi(\tau) = -1$).

Exercice 6

On rappelle (exercice précédent) que si $c = (a_1 ... a_k) \in \mathfrak{S}_n$ est un k-cycle, alors pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$ correspond au cycle $(\sigma(a_1)...\sigma(a_k))$.

En déduire que le nombre de classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_n$ correspond au nombre de partitions de l'entier n [1], et calculer explicitement le nombre de classes de conjugaison dans $\mathfrak{S}_5$.

Solution

Si x est tel que $\sigma^{-1}(x)$ n'est pas dans le support de c, on a $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}(x) = \sigma \circ \sigma^{-1}(x) = x$.
Si en revanche $\sigma^{-1}(x)$ est dans le support de c (disons $\sigma^{-1}(x) = a_l$, on a $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}(x) = \sigma \circ c(a_l) = \sigma(a_{l+1})$.

Toute permutation s'écrit comme un produit de cycle à supports disjoints d'après le cours, et d'après la question précédente, tout couple (c, c') de cycles de même longueur sont conjugués (il suffit de prendre la "bonne σ" pour passer de l'un à l'autre).

Si on a par exemple $c = (abc) \circ (def) \circ (gh)$ et $c = (a'b'c') \circ (d'e'f') \circ (g'h')$, on voit qu'il suffit de prendre σ telle que $\sigma(a) = a'$, $\sigma(b) = b'$, etc pour avoir

$$\sigma \circ c \circ \sigma^{-1} = \sigma \circ (abc) \circ (def) \circ (gh) \circ \sigma^{-1} = \sigma \circ (abc) \circ \sigma^{-1} \circ \sigma \circ (def) \circ \sigma^{-1} \circ \sigma \circ (gh) \circ \sigma^{-1}$$

Et donc on a $c = c'$ d'après la question 1. On voit donc que c et c' sont conjuguées si et seulement si les cycles qui composent leurs décompositions en cycles à supports disjoints sont de même longueur.

Comme il y a pour chaque partition $n = k_1 + ... + k_n$ une permutation dont la décomposition a k_1 points fixes (ou 1-cycles) k_2 transpositions,..., k_n n-cycles, les classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_n$ correspondent donc aux partitions de n.

1. Le nombre de partitions d'un entier n est le nombre de façons d'écrire n comme somme d'entiers strictement positifs.

Pour $n = 5$ on a 7 classes de conjugaison qui correspondent aux partitions $5 =$ (1 5-cycle), $4+1$ (un 4-cycle et un point fixe), $3+2$ (un 3-cycle et une transposition), $3+1+1$ (un 3-cycle et deux points fixes), $2+2+1$ (double transposition), $2+1+1+1$ (une transposition), $1+1+1+1+1$ (identité).