Algèbre

Cours-TD 6/7 complémentes

Exercice 1

On rappelle que si G est un groupe, H est un sous-groupe de G et x est un élément de G, on note $xH = \{xh, h \in H\}$ la classe à gauche de x modulo H.

1. Montrer que si x et y sont deux éléments de G, alors soit $xH = yH$, soit $xH \cap yH = \emptyset$
2. En déduire sur que si G est un groupe fini, alors il existe des éléments $x_1, ..., x_k$ tels que
$$G = x_1H \sqcup ... \sqcup x_kH.$$
3. Montrer que l'entier k de la question précédente est bien défini. C'est l*indice de H dans G*, noté $[G : H]$.
4. En déduire que si G est un groupe fini et H en est un sous groupe, alors le cardinal de H divise celui de G (Théorème de Lagrange).
5. En déduire que si G est fini et $g \in G$, alors l'ordre de g dans G divise le cardinal de G.

Solution

1. Soient $x$et y deux éléments de G tels qu'on ait pas $xH \cap yH = \emptyset$. On a dont $xh_1 = yh_2$, pour deux éléments h_1 et h_2 de H. Montrons que $xH = yH$ en commençant par l'inclusion $xH \subset yH$. Soit $xh \in xH$. l'égalité $xh_1 = yh_2$ indique que $x = yh_2h_1^{-1}$ donc on a nécessairement
$$xh = yh_2h_1^{-1}h \in yH.$$
L'inclusion réciproque est obtenue de manière similaire, en écrivant $xh_1h_2^{-1}$. On a donc soit $xH \cap yH = \emptyset$, soit $xH = yH$
2. Tout élément g de G s'écrit $g = ge_G \in gH$, on peut donc clairement recouvrir G par des classes à gauche modulo H. On a donc $G = \bigcup_{i \in I} x_iH$ mais d'après la question précédente, les classes à gauche modulo H sont soit égales, soit disjointes. En retirant les répétitions, on peut donc écrire G comme une union disjointe de classes à gauches indexés par un sous-ensemble $J \subset I$:
$$G = \bigsqcup_{j \in J} x_jH.$$
Le groupe G étant fini, on a bien sûr qu'un nombre fini de classes à gauches qui apparaissent et donc J est fini.
3. On a vu à la précédente qu'on a
$$G = \bigsqcup_{j \in J} x_jH$$
pour un ensemble J fini, on numérote donc ses éléments et on a
$$G = x_1H \sqcup ... \sqcup x_kH.$$
Maintenant, notez que l'on a pas le choix pour la valeur de k : nous l'avons vu précédemment, pour tout $x \in G$, la translation $H \longrightarrow xH$ qui envoie $h \in H$ sur xh est une bijection, de bijection, réciproque donnée par la translation par x^{-1}. En particulier pour tout élément $x \in G$, le cardinal de la classe à gauche xH est le même que celui de H. L'égalité ensembliste
$$G = x_1H \sqcup ... \sqcup x_kH$$
nous donne donc que
$$Card(G) = Card(x_1H) + ... + Card(x_kH) = Card(H) + ... + Card(H) = kCard(H).$$
On a donc montré que $k = \frac{Card(G)}{Card(H)}$ est uniquement déterminé.

4. Avec ce que l'on a vu plus haut, on a pour tout sous-groupe H de G :

$$Card(G) = [G : H]Card(H),$$

autrement dit le cardinal de H divise celui de G.

5. On a vu précédemment que si G est un groupe fini et $g \in G$, alors l'ordre de g dans G est le cardinal du sous-groupe $< g >$ qu'il engendre. En conséquence, il divise le cardinal de G par la question précédente.

Exercice 2

Soit $n \geq 2$ et H le sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ des permutations qui laissent stable l'élément n.

Montrer que H est un groupe isomorphe à $\mathfrak{S}_{n-1}$ et que l'ensemble $\mathfrak{S}_n/H$ des classes à gauche modulo H est $\{H, (1\ n)H, (2\ n)H, ..., (n-1\ n)H\}$. Retrouver le cardinal de $\mathfrak{S}_n$.

Solution

Clairement H est stable par inverse, composition et contient l'identité, c'est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$.

L'application qui associe à $\sigma \in H$ sa restriction à $\{1, ..., n-1\}$ est un isomorphisme de H sur $\mathfrak{S}_{n-1}$. Maintenant si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ vérifie, $\sigma(n) = k$, on a $(k\ n)\sigma(n) = n$ donc $(k\ n)\sigma \in H$, i.e. $\sigma \in (k\ n)H$.

En regroupant les éléments de $\mathfrak{S}_n$ suivant leurs images de n, on a donc

$$\mathfrak{S}_n/H = \{H, (1\ n)H, (2\ n)H, ..., (n-1\ n)H\}$$

et $Card(\mathfrak{S}_n/H) = [\mathfrak{S}_n : H] = n$. Comme $H \simeq \mathfrak{S}_{n-1}$ on a

$$Card(\mathfrak{S}_n) = Card(\mathfrak{S}_n/H)Card(\mathfrak{S}_{n-1}) = n((n-1)!) = n!$$

si on veut faire une récurrence.

Exercice 3

Montrer qu'il n'existe (à isomorphisme près) que deux groupes d'ordre 6, et les identifier.

Indication : supposer qu'un tel groupe n'est pas cyclique, considérer un élément x d'ordre 3 et un élément y d'ordre 2 (théorème de Cauchy). Observer alors que G ne peut pas être commutatif et montrer qu'il n'existe qu'une table possible pour le groupe.

Solution

Déjà on a $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, on suppose donc que G n'est pas cyclique. On sait par Lagrange que G contient un élément x (resp. y) d'ordre 3 (resp. 2). On sait déjà que G n'est pas commutatif, car si c'était le cas xy serait d'ordre 6, une contradiction.

On voit que les éléments de G sont $\{e, x, x^2, y, xy, x^2y\}$ (si on avait par exemple $x^2y = y$ (resp. $x^2y = x$) on aurait $x^2 = e$ (resp. $xy = e$)).

L'élément xy est d'ordre 2 : en effet en regardant $xyxy$, on sait que le sous-groupe engendré par x est distingué dans G car d'indice 2, donc $yxy = e$ ou x ou x^2. Mais on ne peut pas avoir $yxy = e$, car sinon on aurait $x = e$. De même on a pas $yxy = x$ car sinon $xy = yx$ donc G est commutatif. On a donc $xyxy = xx^2 = e$. On a donc la table de G qui est nécessairement

	e	x	x^2	y	xy	x^2y
e	e	x	x^2	y	xy	x^2y
x	x	x^2	e	xy	x^2y	y
x^2	x^2	e	x	x^2y	y	xy
y	y	$yx = x^2y$	$yx^2 = xy$	e	x^2	x
xy	xy	y	x^2y	x	e	x^2
x^2y	x^2y	xy	y	x^2	x	e

Il y a donc le groupe cyclique, et un groupe non-commutatif d'ordre 6. Spoiler c'est $\mathfrak{S}_3$.

Exercice 4

Soit G un groupe et H un sous-groupe de G d'indice 2. Montrer que H est distingué dans G.

Solution

C'est du cours. On fixe un $g \in G$ et on veut montrer que $gH = Hg$ (une des définitions équivalentes d'être distingué).

Pour cela on sait qu'on peut toujours considérer la partition de G en classes à droites (ou à gauche) modulo n'importe quel sous groupe. Évidemment, la propriété $gH = Hg$ est vraie si $g \in H$.

Si $G \notin H$ on a alors les deux décompositions $G = H \sqcup gH$ et $G = H \sqcup Hg$, on a donc $gH = G \setminus H = Hg$.