Algèbre

Cours-TD 8

Exercice 1

Montrer que le seul sous-groupe distingué de $\mathfrak{S}_n$ qui contient une transposition est $\mathfrak{S}_n$ lui-même.

Solution

On sait que la conjuguée d'une transposition est une transposition et que l'on peut atteindre toute transposition de $\mathfrak{S}_n$ ainsi. Si H est un sous-groupe distingué qui contient une transposition τ, alors donc pour toute autre transposition τ', on a

$$\tau' = \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}$$

donc τ' appartient à H car celui-ci est distingué. Maintenant, les transpositions engendrent $\mathfrak{S}_n$ donc $H = \mathfrak{S}_n$.

Exercice 2

Soit $\varphi : G \longrightarrow G'$ un morphisme de groupes. Montrer que si H' est un sous-groupe distingué de G', alors $\varphi^{-1}(H')$ est distingué dans G.
Montrer que si φ est surjective, l'image d'un sous-groupe distingué de G est distinguée dans G'. Et si φ n'est pas surjective ?

Solution

1. On suppose que H' est distingué dans G'. Soit $g \in \varphi^{-1}(H')$. Pour tout $h \in G$, on a

   $$\varphi(hgh^{-1}) = \varphi(h)\varphi(g)\varphi(h)^{-1}$$

   qui est un élément de H', car celui-ci est distingué dans G'. On a donc bien $\varphi^{-1}(H')$ est distingué dans G.
2. On suppose maintenant que φ est surjective et on prend $h' = \varphi(h) \in \varphi(H)$. Pour tout élément $g' \in G'$ on a un antécédent g pour φ, et donc

   $$g'h'g'^{-1} = \varphi(g)\varphi(h)\varphi(g)^{-1} = \varphi(ghg^{-1})$$

   est bien dans $\varphi(H)$ puisque H est distingué dans G.
3. Un contre exemple à la question précédente, lorsque le morphisme n'est pas surjectif : il suffit de considérer un sous-groupe H d'un groupe G qui n'est pas distingué et l'injection de H dans G. Par exemple : l'injection $\mathfrak{S}_3 \longrightarrow \mathfrak{S}_4$ et en prenant l'image de $\mathfrak{A}_3 = \{id, (123), (132)\}$ on voit que $(14)(123)(14) = (423)$ et donc l'image n'est pas distinguée dans $\mathfrak{S}_4$.

Exercice 3

Soient H et K deux sous-groupes d'un groupe G. Montrer que si H est distingué dans G, alors HK est un groupe. Montrer que si de plus K est aussi distingué dans G, HK est un sous-groupe distingué dans G.

Solution

L'ensemble $HK = \{hk, \quad h \in H, \quad k \in K\}$ contient toujours l'élément neutre. Il sagit de montrer la stabilité par produit et par inverse.

1. Comme H est distingué dans G, on a pour tout $(h, h', k, k') \in H^2 \times K^2$
$$hkh'k' = hkh'k^{-1}kk' \in HK$$
puisque $kh'k^{-1} \in H$.
2. De même si $hk \in HK$, son inverse $k^{-1}h^{-1}$ s'écrit
$$k^{-1}h^{-1} = k^{-1}h^{-1}kk^{-1} \in HK$$
puisque $k^{-1}h^{-1}k \in H$

Maintenant, si K est lui aussi distingué dans G, on a pour tout x dans G et $xhkx^{-1} = xhx^{-1}xkx^{-1}$ appartient à HK, en particulier le sous-groupe HK est lui-aussi distingué.

Exercice 4

Montrer que si H est un sous-groupe d'indice fini de $(\mathbb{Q}, +)$, alors $H = \mathbb{Q}$.

Solution

Dire que H est d'indice fini égal à n dans $\mathbb{Q}$ veut dire que le quotient $\mathbb{Q}/H$ est de cardinal n.

Le résultat provient d'une propriété très particulière de $\mathbb{Q}$: si $n \in \mathbb{N}^*$, alors on a toujours $n\mathbb{Q} = \mathbb{Q}$. En effet, l'inclusion $\subset$ est évidente et si $x \in \mathbb{Q}$, alors $x = \frac{nx}{n} \in n\mathbb{Q}$.

Dès lors, si $\alpha \in \mathbb{Q}/H$, alors le théorème de Lagrange implique que $n\alpha$ est neutre dans $\mathbb{Q}/H$, autrement dit $n\alpha \in H$. Ceci étant vrai pour toute classe α on a $\mathbb{Q} = n\mathbb{Q} \subset H$.

Exercice 5

Soit G un groupe et H un sous-groupe de G d'indice 2. Montrer que H est distingué dans G.

Solution

C'est du cours. On fixe un $g \in G$ et on veut montrer que $gH = Hg$ (une des définitions équivalentes d'être distingué).

Pour cela on sait qu'on peut toujours considérer la partition de G en classes à droites (ou à gauche) modulo n'importe quel sous groupe. Évidemment, la propriété $gH = Hg$ est vraie si $g \in H$.

Si $G \notin H$ on a alors les deux décompositions $G = H \sqcup gH$ et $G = H \sqcup Hg$, on a donc $gH = G \setminus H = Hg$.

Exercice 6

Montrer qu'un groupe abélien est simple [1] si et seulement s'il est d'ordre premier.

Solution

Puisque G est abélien tous ses sous-groupes sont distingués, il s'agit donc de trouver les groupes abéliens qui n'ont aucun sous-groupe non-trivial.

$\Leftarrow$ C'est le sens facile : par Lagrange le cardinal de tout sous-groupe de G est soit 1, soit p, donc si G est d'ordre p, ses seuls groupes sont le groupe trivial et lui-même.

$\Rightarrow$ On montre déjà que G est fini. Si $x \in G$ n'est pas l'élément neutre, on a nécessairement $< x >= G$ (car G n'a pas de sous-groupe non-trivial) et donc dire que G est infini revient à dire que $< x >$ est d'ordre infini, et donc isomorphe à $\mathbb{Z}$. Mais $\mathbb{Z}$ possède une infinité de sous-groupes non-triviaux, les $< n >$ pour $n \geq 0$, donc ce n'est pas possible.

Le groupe G est donc fini et cyclique. Si $Card(G) = n$ n'est pas premier, on a un diviseur strict $1 < r < n$ de n et x^r engendre un sous groupe strict d'ordre $\frac{n}{\mathrm{pgcd}(r,n)}$ comme vu dans la feuille de TD précédente. L'ordre de G est donc nécessairement premier.

Exercice 7

1. Un groupe G est dit simple s'il ne possède pas de sous-groupe distingué non-trivial.

Soit G un groupe d'ordre $2p$, p étant premier et impair. Montrer que si G contient un sous-groupe normal d'ordre 2, G est cyclique.

(on pourra considérer un générateur du sous-groupe d'ordre 2 de l'énoncé et montrer qu'il appartient à $Z(G)$ et on admettra que g possède un élément d'ordre p -théorème de Cauchy).

Solution

On note x le générateur du sous-groupe distingué H, d'ordre 2 de G. Par hypothèse pour tout élément $g \in G$, on a alors $gxg^{-1} \in H$ car H est distingué, et cet élément n'est certainement pas e (sinon $x = e$). On a donc donc $gxg^{-1} = x$ et $gx = xg$.

Maintenant on sait (admis) que G possède un élément h d'ordre p. Comme h et x commutent, l'élément xh est d'ordre $2p$ par l'exercice de la feuille précédente sur l'ordre des éléments. L'élément xh est d'ordre $2p$ dans G, c'en est dont un générateur et G est cyclique.

Exercice 8

Montrer qu'il n'existe (à isomorphisme près) que deux groupes d'ordre 6, et les identifier.

Indication : supposer qu'un tel groupe n'est pas cyclique, considérer un élément x d'ordre 3 et un élément y d'ordre 2 (théorème de Cauchy). Observer alors que G ne peut pas être commutatif et montrer qu'il n'existe qu'une table possible pour le groupe.

Solution

Déjà on a $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, on suppose donc que G n'est pas cyclique. On sait par Lagrange que G contient un élément x (resp. y) d'ordre 3 (resp. 2). On sait déjà que G n'est pas commutatif, car si c'était le cas xy serait d'ordre 6, une contradiction.

On voit que les éléments de G sont $\{e, x, x^2, y, xy, x^2y\}$ (si on avait par exemple $x^2y = y$ (resp. $x^2y = x$) on aurait $x^2 = e$ (resp. $xy = e$)).

L'élément xy est d'ordre 2 : en effet en regardant $xyxy$, on sait que le sous-groupe engendré par x est distingué dans G car d'indice 2, donc $yxy = e$ ou x ou x^2. Mais on ne peut pas avoir $yxy = e$, car sinon on aurait $x = e$. De même on a pas $yxy = x$ car sinon $xy = yx$ donc G est commutatif. On a donc $xyxy = xx^2 = e$. On a donc la table de G qui est nécessairement

	e	x	x^2	y	xy	x^2y
e	e	x	x^2	y	xy	x^2y
x	x	x^2	e	xy	x^2y	y
x^2	x^2	e	x	x^2y	y	xy
y	y	$yx = x^2y$	$yx^2 = xy$	e	x^2	x
xy	xy	y	x^2y	x	e	x^2
x^2y	x^2y	xy	y	x^2	x	e

Il y a donc le groupe cyclique, et un groupe non-commutatif d'ordre 6. Spoiler c'est $\mathfrak{S}_3$.