Algèbre

Cours-TD 9

Exercice 1

Soit $\varphi : G \longrightarrow G'$ un morphisme de groupes. Montrer que si H' est un sous-groupe distingué de G', alors $\varphi^{-1}(H')$ est distingué dans G.

Montrer que si φ est surjective, l'image d'un sous-groupe distingué de G est distinguée dans G'. Et si φ n'est pas surjective ?

Solution

Soit $g \in \varphi^{-1}(H')$. Pour tout $h \in G$, on a $\varphi(hgh^{-1}) = \varphi(h)\varphi(g)\varphi(h)^{-1}$ est dans H' car distingué dans G', et donc $\varphi^{-1}(H')$ est distingué dans G.

On suppose maintenant que φ est surjective et on prend $h' = \varphi(h) \in \varphi(H)$. Pour tout élément $g' \in G'$ on a un antécédent g pour φ, et donc $gh'g^{-1} = \varphi(g)\varphi(h)\varphi(g)^{-1} = \varphi(ghg^{-1})$ est bien dans $\varphi(H)$ puisque H est distingué.

En considérant l'injection $\mathfrak{S}_3 \longrightarrow \mathfrak{S}_4$ et en prenant l'image de $\mathfrak{A}_3 = \{id, (123), (132)\}$ on voit par exemple que $(14)(123)(14) = (423)$ et donc l'image n'est pas distinguée dans $\mathfrak{S}_4$.

Exercice 2

Montrer que le groupe spécial orthogonal $SO_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe distingué de $O_n(\mathbb{R})$. Décrire le groupe quotient $O_n(\mathbb{R})/SO_n(\mathbb{R})$.

Solution

Le groupe $SO_n(\mathbb{R})$ est distingué dans $O_n(\mathbb{R})$ puisqu'il s'agit du noyau du déterminant

$$\det : O_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^*.$$

Si A est une matrice orthogonale, on a ${}^tAA = I_n$ et donc

$$1 = \det(I_n) = \det({}^tAA) = \det(A)^2.$$

L'image de det est $\{\pm 1\}$ et le théorème d'isomorphisme stipule qu'on a un isomorphisme de groupes

$$O_n(\mathbb{R})/ker(\det) \simeq Im(\det).$$

L'image de det est comme on l'a vu égale à $\{\pm 1\}$, c'est un groupe d'ordre 2, donc d'après le cours, elle est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On est donc face à un isomorphisme

$$O_n(\mathbb{R})/SO_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Exercice 3

1. Trouver une solution particulière comprise entre 0 et 100 du système de congruences

$$\begin{cases} k & \equiv 2 \pmod 5 \\ k & \equiv 4 \pmod 7 \end{cases}$$

2. On considère le morphisme de groupes

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{7\mathbb{Z}}. \\ n & \longmapsto & (\bar{n}, \tilde{n}) \end{array}$$

où $\bar{n}$ désigne la classe de n modulo 5, et $\tilde{n}$ sa classe modulo 7. Montrer que $Ker(\varphi) = 35\mathbb{Z}$.

3. En déduire un isomorphisme de groupes
$$\psi : \frac{\mathbb{Z}}{35\mathbb{Z}} \longrightarrow \frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{7\mathbb{Z}}.$$
4. En déduire l'ensemble des solutions du système de la question 1.

Solution

1. On teste à la main. Les solutions de la première équation sont $\pm 2, \pm 7, \pm 12, \pm 17...$ et de la seconde $\pm 4, \pm 11, \pm 25, \pm 32...$ et on voit que par exemple, 32 convient.
2. On montre que $Ker(\varphi) = 35\mathbb{Z}$ avec une double inclusion.
   D'une part, clairement, on a $35\mathbb{Z} \subset Ker(\varphi)$: en effet, $\varphi(35k) = (\bar{35k}, \tilde{35k}) = (\bar{0}, \tilde{0})$.

   Réciptoquement, si k est tel que $\varphi(k) = (\bar{0}, \tilde{0})$, on a donc $\bar{k} = \bar{0}$ et $\tilde{k} = \tilde{0}$, c'est à dire à la fois $5|k$ et $7|k$. Comme 5 et 7 sont premiers entre eux, on a alors $35|k$ et donc $k \in 35\mathbb{Z}$.
3. Le théorème d'isomorphisme du cours implique qu'on a un morphisme de groupes
$$\psi : \frac{\mathbb{Z}}{35\mathbb{Z}} \longrightarrow \frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{7\mathbb{Z}}.$$
   Montrons que c'est un isomorphisme. L'application est injective (c'est le cas du théorème du cours où $H = \ker(f)$. L'application ψ est donc une injection entre deux groupes finis et de même cardinal : c'est automatiquement une surjection et ψ est bijective.
4. L'ensemble des solutions du système correspond simplement à l'image réciproque de $(\bar{2}, \tilde{4})$ par l'application φ. On sait que 32 appartient à cette image réciproque par la question 1. La question précédente implique donc que $\varphi^{-1}(\bar{2}, \tilde{4}) = 32 + 35\mathbb{Z} = \{32 + 35k, \ k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 4

Soit G un groupe abélien fini et p un diviseur premier de $Card(G)$. En considérant un sous-groupe $< g > \subset G$ engendré par un élément non-nul de G et le quotient $G/ < g >$, montrer par récurrence sur $Card(G)$ que G possède un élément d'ordre p.

Solution

Si $Card(G) = 1$ il n'y a rien à montrer.

Soit donc maintenant G un groupe d'ordre $n > 1$ et p un diviseur premier de n. On considère un élément g non trivial de G qui engendre un sous-groupe $< g >= H$. Puisque $|G| = |H||G/H|$ et que p est un nombre premier, on a $p \mid |H|$ ou $p \mid |G/H|$.

— Si $p \mid |H|$ on a $o(g) = |H| = pk$ pour un certain k et donc $o(g^k) = p$ (l'ordre de g^k est un diviseur de p différent de 1).

— Si $p \mid |G/H|$, par hypothèse de récurrence on a une classe à gauche $g'H$ d'ordre p dans le groupe G/H.
  On voit que $(g'H)^{o(g')} = g'^{o(g')}H = H$, et donc l'ordre de $g'H$ (i.e. p) divise l'ordre de g' dans G. On a donc $o(g') = pk$ et à nouveau g'^k est d'ordre p.

Exercice 5

Démontrer que $SL_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe distingué de $GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que le groupe quotient $GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R})$ est isomorphe à $\mathbb{R}^*$.

Solution

Le sous-groupe $SL_n(\mathbb{R})$ de $GL_n(\mathbb{R})$ est clirement distingué, c'est le noyau du déterminant. Le théorème d'isomorphisme permet de conclure que le déterminant induit un isomorphisme
$$GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^*.$$

Exercice 6

On considère le sous-ensemble des matrices de taille 2

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \right\}$$

1. Montrer que G est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$.
2. on considère l'application $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{R}^*$ définie par

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = a$$

   a) Montrer que φ est un morphisme de groupes.
   b) Trouver un sous-groupe H de G tel que $G/H \simeq \mathbb{R}^*$.
   c) Construire un isomorphisme $H \simeq (\mathbb{R}, +)$.

Solution

1. On voit que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & -b/a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   et c'est clairement un sous-ensemble stable parproduit.
2. a) trivial
   b) On voit que le noyau de φ (qui est le déterminant...) est constitué des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec b un réel.Le théorème d'isomorphisme assure sans souci ainsi un tel isomorphismes avec $H = ker(\varphi)$.
   c) L'application $\psi : H \longrightarrow (\mathbb{R}, +)$ définie par

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = b$$

   est un isomorphisme de groupes.

Exercice 7

Soitnet G un groupe et H, K deus sous-groupes sidtingués de G. Montrer que le sous-groupe engendré par $H \cup K$ est lui aussi un sous-groupe sidtingué de G.

Solution

Un élément de $< H \cup K >$ est un mot $x_1...x_n$ où les x_i sont des éléments de H ou de K. Si g est un élément de G, alors ona

$$gx_1...x_ng^{-1} = gx_1g^{-1}gx_2g^{-1}...gx_ng^{-1} \in < H \cup K >$$

car H et K sont eux-même des sous-groupes distingués.